

# 压电效应新技术及应用

高长银 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

基于晶体变形的三维压电效应研究属于晶体物理学、电介质物理学、静电学、弹性力学、实验力学等多学科交叉研究的前沿课题,它将压电效应从二维发展到三维,从线性极化发展到非线性极化,束缚电荷从单电极提取发展到多电极复合提取,在一定程度上发展了压电学科的理论体系。

本书集作者近 10 年来对基于晶体变形的压电效应的研究而成,详细介绍了基于晶体变形的压电效应研究的历史和意义,石英晶片拉压效应的理论计算、实验结果及典型应用,石英晶柱弯曲效应研究(纯弯曲效应、悬臂梁弯曲效应、简支梁弯曲效应)及逆压电弯曲效应,方形和圆形石英晶片扭转效应理论计算、电极布置、实验结果及在传感器上的应用,压电传感器的静态标定装置、标定方法及动态标定理论等。

本书可作为机械设计制造及其自动化、机械电子工程,以及检测及控制专业等相关专业高年级学生、研究生的教材,还可供压电研究人员和工程人员参考使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

压电效应新技术及应用/高长银著. —北京:电子工业出版社, 2012.5

ISBN 978-7-121-16894-9

I. ①压… II. ①高… III. ①压电效应—研究 IV. ①O482.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 084928 号

策划编辑:李 洁

责任编辑:刘真平

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×980 印张:13.5 字数:302 千字

印 次:2012 年 5 月第 1 次印刷

印 数:2500 册 定价:49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltts@phei.com.cn](mailto:zltts@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线:(010) 88258888。

## 作者简介



高长银，博士，副教授，现工作于郑州航空工业管理学院，任航空工程系副主任。1975 年出生于河北省丰润县，1994 年考入燕山大学，攻读“机械制造工艺及设备”工学学士学位，1998 年获燕山大学“校级优秀毕业生”、“河北省优秀毕业生”称号。1998 年考入郑州机械研究所，攻读“机械设计及理论”工学硕士学位。2004 年考入大连理工大学，攻读“机械制造及自动化”工学博士学位，获得震雄专项奖学金，获得“优秀共产党员”称号。

高长银副教授长期从事机械检测和控制技术、传感器与执行器研究开发、机械产品设计和研发、热处理冷却技术研究、机械制造教学与科研工作，近年来在国内外重要学术刊物上发表论文 50 篇，SCI 检索 6 篇，EI 检索 25 篇，主持或参与国家级项目 2 项，省部级项目 5 项，主编出版教材 30 余部。

# 前 言

自压电效应发现以来,迄今已有百年历史,目前压电效应研究一直是压电学基础理论研究的核心课题。由于科技发展和工程实际需要,压电效应的研究已经由单纯基于应力的纵向、横向、剪切等二维效应研究发展到基于晶体拉伸、压缩、弯曲、扭转变形的三维复合效应研究。

基于晶体变形的三维压电效应研究属于晶体物理学、电介质物理学、静电学、弹性力学、实验力学等多学科交叉研究的前沿课题,如果说纵向、横向、剪切等压电效应研究是从晶体应力的角度出发揭示了机电耦合与变换的内在规律,那么拉压效应、扭转效应、弯曲效应研究则是从晶体变形上反映了压电晶体的上述规律。基于晶体变形的压电效应研究将压电效应从二维发展到三维,从线性极化发展到非线性极化,束缚电荷从单电极提取发展到多电极复合提取……从而在一定程度上发展了压电学科的理论体系。

本书集作者近 10 年来对基于晶体变形的压电效应的研究而成。全书共分 9 章,第 1 章绪论介绍压电扭转弯曲效应研究的现状;第 2~4 章分别介绍压电效应晶体物理学、力学及电学基础;第 5 章详细介绍压电拉压效应的理论计算、实验结果及典型应用;第 6 章详细介绍弯曲效应,包括纯弯曲效应、悬臂梁弯曲效应、简支梁弯曲效应及逆压电弯曲效应;第 7 章介绍圆形石英晶片压电扭转效应理论计算、实验测试及新型扭矩传感器;第 8 章介绍方形石英晶片的扭转效应及其在三向钻削测力仪上的应用;第 9 章介绍多功能压电测力仪静态标定平台结构,以及压电石英传感器动态响应原理和方法。

本书得到“河南省高等学校青年骨干教师资助计划”支持和省科技厅科技攻关(112102210413)资助,在此表示感谢。

本书由郑州航空工业管理学院高长银著,可作为机械设计制造及其自动化、机械电子工程,以及检测及控制专业等相关专业高年级学生、研究生的教材,还可供压电研究人员和工程人员参考使用。

由于作者水平有限,书中难免存在缺点和错误,敬请广大读者批评指正。

编 者  
2011 年于郑州



# 目 录

第 1 章 绪论 .....	(1)	3.1.2 应变状态理论 .....	(38)
1.1 压电效应简介 .....	(1)	3.1.3 本构关系 .....	(40)
1.2 基于晶体变形效应研究简介 .....	(9)	3.1.4 静力学唯一性定理 (Kirchhoff-Neumann 唯一性定理) .....	(42)
1.2.1 压电弯曲效应研究 .....	(9)		
1.2.2 压电扭转效应研究 .....	(11)		
第 2 章 压电效应晶体物理学基础 .....	(15)	3.2 各向异性弹性力学平面问题 基本方程 .....	(43)
2.1 晶体结构与对称性 .....	(15)	3.2.1 平面应变问题 .....	(43)
2.1.1 晶体及其点阵结构 .....	(15)	3.2.2 平面应力问题 .....	(46)
2.1.2 晶体对称性及对称 元素 .....	(18)	3.3 各向异性弹性体的空间扭转 问题 .....	(47)
2.1.3 晶体的分类 .....	(20)	3.3.1 各向异性弹性体空间 扭转问题基本方程 .....	(48)
2.2 晶体宏观物理性质与晶体对 称性 .....	(22)	3.3.2 各向异性弹性体空间 扭转问题的边界条件 .....	(51)
2.2.1 晶体的宏观物理性质 .....	(22)	3.3.3 各向异性弹性体空间 扭转问题的解法 .....	(53)
2.2.2 用张量描述宏观物理 性质 .....	(22)		
2.2.3 晶体对称性对晶体宏观 物理性质的影响 .....	(24)	第 4 章 压电效应电学基础 .....	(56)
2.3 传感器与执行器的物质效应 模型 .....	(25)	4.1 自由空间的电磁场定律 .....	(56)
2.3.1 6 种能量间的物质效应 模型 .....	(25)	4.1.1 自由空间的积分电磁场 定律 .....	(56)
2.3.2 3 种能量间的物质效应 G. Heckmann 模型 .....	(31)	4.1.2 自由空间的微分电磁场 定律 .....	(57)
第 3 章 压电效应力学基础 .....	(36)	4.1.3 场定律整体含义 .....	(58)
3.1 各向异性弹性力学基本方程 .....	(36)	4.1.4 电磁场边界条件 .....	(59)
3.1.1 应力状态理论 .....	(36)	4.2 静电场标量位 .....	(59)
		4.2.1 静电场标量位的引入 .....	(60)

4.2.2	静电场标量位的微分方程	(60)	5.4.2	压电式压力传感器	(82)
4.3	有物质存在时的宏观场定律	(60)	5.4.3	压电式加速度传感器	(82)
4.3.1	极化强度的概念	(61)	第 6 章	石英晶体弯曲效应研究	(85)
4.3.2	极化电荷密度	(61)	6.1	弯曲效应采用的石英晶柱结构	(85)
4.4	各向异性介质宏观场定律	(63)	6.2	基本切型的纯弯曲效应的研究	(86)
4.4.1	各向异性介质的一般特性	(63)	6.2.1	弯曲效应应力和束缚电荷计算	(86)
4.4.2	各向异性介质麦克斯韦方程组	(64)	6.2.2	极化电场模拟	(88)
4.4.3	各向异性介质标势满足的方程	(64)	6.2.3	弯曲效应实验	(90)
4.4.4	各向异性介质标势所满足的边界条件	(65)	6.2.4	弯曲效应中晶体切型优化	(94)
第 5 章	石英晶片拉压效应研究	(67)	6.3	基本切型的悬臂梁弯曲效应研究	(96)
5.1	石英压电效应基础知识	(67)	6.3.1	弯曲应力计算	(97)
5.1.1	压电效应的机理	(67)	6.3.2	束缚电荷计算	(98)
5.1.2	石英晶体的物理与机械性能	(69)	6.3.3	极化电场模拟	(99)
5.1.3	石英的压电机理	(70)	6.3.4	实验与结果分析	(100)
5.1.4	基于应力的压电效应及其表达式的建立	(73)	6.4	基本切型的简支梁弯曲效应研究	(102)
5.1.5	石英晶体的几何切型	(74)	6.4.1	弯曲应力计算	(102)
5.2	石英晶片拉压效应数值计算	(76)	6.4.2	束缚电荷计算	(103)
5.2.1	拉压应力计算	(76)	6.4.3	极化电场模拟	(104)
5.2.2	束缚电荷计算	(77)	6.4.4	实验与结果分析	(105)
5.2.3	束缚电场仿真	(78)	6.5	基本切型的逆压电弯曲效应研究	(107)
5.3	拉压效应的实验测定	(79)	6.5.1	压电方程	(108)
5.3.1	拉压晶组组成	(79)	6.5.2	自由端致动位移	(109)
5.3.2	实验装置	(80)	6.6	基于谐振器的双向微动机构的设计	(111)
5.3.3	实验结果	(81)	6.6.1	石英谐振器弯曲振动模式	(111)
5.4	典型压电力学量传感器	(81)	6.6.2	双向微动机构的设计	(113)
5.4.1	单向压电式石英力传感器	(81)			

## 第7章 圆形石英晶片扭转效应研究… (115)

- 7.1 圆形石英晶片扭转效应的数值计算… (115)
  - 7.1.1 扭转应力计算… (116)
  - 7.1.2 束缚电荷密度计算… (119)
  - 7.1.3 扭转极化电场仿真… (120)
  - 7.1.4 石英晶片扭转效应的实验验证… (122)
  - 7.1.5 扭转电荷灵敏度分布规律的研究… (125)
- 7.2 圆形石英晶片扭转效应的电荷分析法… (128)
  - 7.2.1 晶片数量选择和扭矩测量晶组组成… (128)
  - 7.2.2 实验结果与分析… (129)
  - 7.2.3 实验误差分析… (130)
- 7.3 基于扭转效应的扭矩传感器结构设计… (130)
  - 7.3.1 基于扭转效应的扭矩传感器的石英晶片尺寸计算… (131)
  - 7.3.2 基于扭转效应的扭矩传感器的晶体盒尺寸计算… (132)
  - 7.3.3 基于扭转效应的扭矩传感器的预紧力与量程计算… (134)
  - 7.3.4 新型扭矩传感器的装配… (136)
- 7.4 新型扭矩传感器的性能标定… (138)
  - 7.4.1 基于扭转效应的扭矩传感器的静态标定… (138)
  - 7.4.2 基于扭转效应的扭矩传感器的动态标定… (140)

- 7.4.3 基于扭转效应的扭矩传感器的横向干扰测定… (142)

- 7.5 新型扭矩传感器在钻削测量中的应用… (142)
  - 7.5.1 实验测量系统… (142)
  - 7.5.2 实验设计… (143)
  - 7.5.3 实验结果与分析… (145)

## 第8章 方形石英晶片扭转效应研究… (148)

- 8.1 方形石英晶片扭转效应数值计算… (148)
  - 8.1.1 扭转应力计算… (148)
  - 8.1.2 束缚电荷密度计算… (153)
  - 8.1.3 检测电极布置… (155)
- 8.2 三向压电钻削测力仪结构设计… (155)
  - 8.2.1 石英测量晶组方案选择… (156)
  - 8.2.2 三向压电钻削测力仪壳体设计… (157)
  - 8.2.3 三向压电钻削测力仪的横向干扰… (158)
  - 8.2.4 三向压电钻削测力仪的预紧力与量程计算… (160)
  - 8.2.5 三向压电钻削测力仪灵敏度的计算… (163)
- 8.3 三向压电钻削测力仪的动态特性分析… (164)
  - 8.3.1 幅值误差与带宽… (164)
  - 8.3.2 相位误差与带宽… (165)
- 8.4 三向压电钻削测力仪的标定… (166)
  - 8.4.1 三向压电钻削测力仪的静态标定… (166)
  - 8.4.2 三向压电钻削测力仪的向间干扰… (168)

8.4.3	三向压电钻削测力仪 的动态标定 .....	(173)	9.4	电荷放大器对石英力传感器 动态特性的影响 .....	(193)
第 9 章	压电传感器静态和动态标定...	(175)	9.4.1	压电石英传感器的等 效电路 .....	(194)
9.1	压电传感器静态标定 .....	(175)	9.4.2	电压放大器对压电传 感器的频率响应特性 的影响 .....	(194)
9.1.1	静态误差的定义方法 ..	(176)	9.4.3	电荷放大器对压电传 感器的频率响应特性 的影响 .....	(197)
9.1.2	采用“逐级加、卸载 法”进行静态标定的 方法与步骤 .....	(178)	附录 A	.....	(199)
9.1.3	石英晶体力传感器技 术性能指标 .....	(179)	A.1	张量基本知识 .....	(199)
9.2	多功能压电测力仪静态标 定台 .....	(180)	A.1.1	张量的认识 .....	(199)
9.2.1	多功能压电测力仪静 态标定台原理与结构	(180)	A.1.2	张量的变换法则 .....	(201)
9.2.2	滑动螺旋传动设计 计算 .....	(184)	A.2	弹性顺度系数的坐标变换 .....	(202)
9.2.3	精度与刚度 .....	(186)	A.2.1	应力坐标变换 .....	(202)
9.3	压电石英测力仪动态响应 分析 .....	(188)	A.2.2	弹性顺度系数的坐标 变换 .....	(204)
9.3.1	测力仪的频率响应 .....	(188)	A.3	压电系数的坐标变换 .....	(205)
9.3.2	动态误差与工作频带 ..	(191)	参考文献	.....	(206)

# 第 1 章

## 绪 论

21 世纪是人类全面进入信息电子化的时代，现代信息技术的基础是信息采集、信息传输与信息处理，它们就是传感器技术、通信技术和计算机技术。传感器处于信息采集系统的前端，是感知、获取与检测信息的窗口，它提供系统进行决策和处理所必需的原始数据。不难得出，传感器是自动控制系统和信息系统的关键基础器件，其技术水平直接影响到自动化系统和信息系统的水平，自动化技术水平越高，对传感器技术的依赖程度越大。随着自动控制系统的发展，传感系统的要求也越来越高，因此开发新的传感系统以适应控制系统提出的新要求是现在传感领域发展的新趋势。传感器的工作基础是各种物理现象、化学反应和生物效应，所以发现新现象与新效应是发展传感器技术的重要工作，是研制新型传感器的重要基础，对于研制新的传感系统具有革命性的意义。

### 1.1 压电效应简介

压电效应发现的历史可追溯到 1815 年，Coulomb 第一次在理论上提出了设想，即机械压力能产生电信号。1820 年，Haüy 和 Becquerel 通过实验进一步提出了由于受压产生的电荷主要是摩擦生电或接触生电。Becquerel 参照拉伸橡胶生电的原理，提出在晶体材料受压时可能出现同样的效应（生电），这种拉压生电可能是由于材料的各向异性所致。毋庸置疑，压电效应的正式发现是在 1880 年 Curie 兄弟（Pierre Curie 和 Jacques Curie）在研

究热电现象和晶体对称性的关系时,在 Jacques Curie 的实验室里于  $\alpha$  石英晶体上最先发现了压电效应,他们得到的结论为:

“对于一些晶体有一个或多个晶轴(借助于该晶体所属点群中的其他对称操作不能使其两端相互重合(译者著)),当有温度变化时,在这些晶轴方向两端会产生极化电荷。这就是现在所说的热电效应”;“在相同的晶体上,我们发现一种新的产生极化电荷的方法:当有变化的压力沿这些半面晶轴作用时,也会产生相应的极化电荷”。

1881 年, Hankel 建议用 “piezoelectricity” 来描述这种力电效应,词头 “piezo” 来自希腊文 “Piezein”,意思是“加压”,表示晶体加压后能产生电现象。Cady 对这个词所下的概括性定义如下:“压电是由某些种类晶体上的机械应变而产生的电极化,这种极化的强弱与应变的大小成正比,极化的正负随应变的方向而变化”,从这以后这个词被大家广泛采用。1881 年, Lippman 根据热力学原理和能量守恒及电荷守恒定律,从理论上预言了逆压电效应的存在。同年, Curie 兄弟用实验证实了压电晶体在外加电场作用下会出现应变和应力,并发现压电效应是固态电介质的力学参数和电学参数之间的线性耦合效应,同时获得了石英晶体相同的正逆压电常数,证明了正逆压电效应具有相同的压电常数。1890 年, Neumann 通过实验建立了描述晶体物理性质的 3 条准则,使得解决压电效应与晶体对称性的关系成为可能。1890 年 Federov 和 1891 年 Schoenflies 相继用群论方法系统地解决了晶体的分类问题,证明了具有周期性排列规则的晶格按晶系、点群和空间群,由粗到细共分成 7 个晶系, 32 个点群和 230 个空间群。晶系按结晶学晶胞的 3 个边长和 3 个边之间的夹角的相互关系来区分,点群描述了晶体的方向对称性,而空间群则描述了晶体的平移对称性。1893 年, Lord Kelvin 提出了一个简单的原子模型来解释压电效应,之后 Duhem 和 Pockels 对压电效应的发展都做出了相应的贡献。

但是直到 1894 年 Woldemar Voigt 用热力学唯象理论推导出压电方程,并得到了热电和压电与晶体对称性的关系,才使压电效应理论逐渐走向成熟。Woldemar Voigt 通过综合考虑晶体对称性与弹性张量和电场矢量对称性后指出,在 32 种点群中仅无对称中心的 20 种点群的晶体才可能具有压电效应。因为在这 20 种点群的晶体的三阶张量独立分量数不等于零,从而可以产生压电效应,因此压电晶体的必要条件是它具有对称中心。1910 年, Voigt 在他的专著 *Lehrbuch der Kristallphysik* 中第一次提出了张量的概念,定义了压电张量、弹性张量等物性参数,并指出控制晶体压电行为的方程由张量彼此联系,应力张量正比于应变张量,应变张量又正比于电场张量。因此,耦合力学量与电学量的压电系数是相同的。同时提出了下标缩并法可将三阶张量变换为二维的形式,所以压电方程可以写成二维空间的形式。由于 Voigt 的这部专著是有关压电性方面的第一本经典著作,使得张量的定义流行甚广。第二次世界大战期间,石英和其他晶体的压电效应在军事和通信技术上得到了广泛的应用,使得关于压电方面的术语越来越多地出现于技术领域。

1920年, M.Born 用晶格动力学研究立方晶系介电、热电和压电效应, 并从理论上推导 B-ZnS 的压电系数。后来 Cady 从应用技术角度出发总结出与压电效应有关的晶体性质时, 改称弹性常数为弹性刚度常数, 弹性模量为弹性顺度常数, 压电常数为压电应力常数和压电模量为压电应变常数, 此时压电效应才真正从理论上所具有的神秘色彩转化为实际应用。Mason 在总结压电效应的唯象理论和技术应用时也采用了 Cady 提出的这些定义, 后来, 国际上关于压电方面的术语基本上以此为准。

压电学是晶体物理学的一个分支, 它是研究压电材料在机械应力或电场作用下所发生的弹性效应和电极化效应相互耦合的原理及其应用的一门科学。压电效应的发现虽然已有百年, 但在早期主要着重研究晶体的物理现象, 由于应用上没有重视, 因而发展缓慢。压电效应最开始的应用仅仅为测量电荷, 利用它产生已知电荷来测量电压、电流、电容等电量。

公认压电效应的真正应用要追溯到第一次世界大战。在战争期间, 由于德国潜艇击沉了大量船只, 所以迫切需要寻求一种方法来定位潜艇, 而无线电波不能在海水中传播, 所以最好的办法就是利用声波来监视潜艇。1917年, Paul Langevin 使用压电激励的石英片产生水中声波, 制成水下声波探测器来探测潜水艇, 从而开辟了超声学和水声学领域, 也揭开了压电应用史的光辉篇章, 他也被誉为声纳之父。第一次世界大战后不久, 石英变换器和换能器就得到了重要的应用, G.W.Pierce 发明了超生干涉计, 用来测量波长和速度。1927年, Wood 和 Loomis 首次采用 Langevin 式变换器和真空管研制成功了可产生高能超声信号的石英换能器。尽管在水声研究中, 石英晶体很快就被罗谢尔盐代替了, 但当要求高稳定性和低温度频率系数时, 石英晶体仍起着不可替代的作用, 广泛应用于晶振器的频率控制和选频滤波器中。

压电晶体在激振频率接近其机械谐振频率时的特性, 引发了压电谐振器件的研究, A.M.Nicholson 和 W.Cady 是这一领域的先驱。早在 1655 年由法国罗息的药剂师息格涅特 (Pierre de La Seignette) 制备出酒石酸钾钠 (罗息盐  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , 简称 RS), 1884 年, F.Pockels 对它的压电效应进行了定量测量, 到了 1917 年, 贝尔电话实验室的 A.Nicholson 用它做成拾音器、微音器和扬声器, 并取得了使用罗息盐晶体振荡器的专利。1920 年, Cady 获得了一种振荡器电路的专利, 从而第一个压电谐振器于 1921 年问世。他的振荡器是一种三级放大器, 而石英谐振器则位于反馈电路中。Cady 在他的著作 *Piezoelectricity* 中论述了谐振器的研究, 并阐述共振的石英晶体和电力振荡器之间的联系, 以及稳频的方法。稍后, Pierce 证明了晶体控制振荡器可以只由一个真空管组成, 与此同时, Butterworth (1915)、Van Dyke (1925)、Dye (1926) 和 Mason (1943) 进行了晶体谐振器的机械参数及等效电路的研究, 这些研究更深入地探讨了如何利用晶体谐振器来制作滤波器和振荡器, 尽管对它的研究姗姗来迟, 但还是在很大程度上影响了电子设备的发展。在第一次世

界大战初期,电子管设备第一次应用在电话线路中,并于战争末期应用在无线通信设备中。下一步重要的发展是在通信中的应用,美国国家标准局首次应用石英晶体振荡器作为频率标准。1926年,石英谐振器首次用于发报机的稳频,这标志着石英晶体振荡器应用的开始。从这以后,压电效应获得了飞速的发展,广泛应用于航空通信、信号发射和民用通信中,在频率控制、滤波和换能等方面逐渐得到广泛应用。

在石英晶体谐振器发展的历史中,值得一提的有如下标志性事件:W.A.Marrison 在贝尔实验室工作时,发现可对石英晶体进行温度补偿,当 F.R.Lack、G.W.Willard 和 I.E.Fair 在 1934 年发现了 AT 和 BT 切型后,这一初期的结论得到进一步的研究。这两种切型至今仍在世界范围内广泛应用。1933 年,I.Koga 和 N.Takagi 分别发现 AT 和 BT 切型具有较好的温度特性。随后又发现了一系列晶体切型,S.C.Hight 和 G.W.Willard 发现 CT 和 DT 切型,S.C.Hight 又发现 ET 和 FT 切型,W.Mason 发现 GT 切型。Sykes 和 Warner 等人对晶体表面的电极布置做出了重大贡献,这些技术今天仍然得到广泛的应用。最近又涌现出一批双转角切型,具有代表性的是 Eernisse 发现的 SC 切型和 Besson 发明的 BVA 谐振器。

1920 年后,J.Valasek 又进一步发现罗息盐具有铁电性,它在外电场作用下能够极化反转,具有电滞回线,在居里点附近出现介电异常。1921 年,J.Valasek 发现单晶体的铁电效应和压电罗谢尔盐,它是第一个被发现具有铁电效应的材料。在这之后很多年,罗谢尔盐是所知道的唯一铁电材料,但现在已发现了上百种铁电材料。铁电材料之所以能作为变换器,是由于这类材料既具有自发极化又具有感应极化的性质,而且相对于石英这样的压电晶体来说,它们具有很高的机电耦合系数,但它们的稳定性不如石英晶体。

从 19 世纪 80 年代发现压电效应到 20 世纪 40 年代,压电效应的研究和应用只局限于晶体材料,到目前为止,发现并进行过测量的压电晶体不下五百余种。但是多数晶体的压电效应很弱,已被仔细研究的只有几十种,其中只有几种得到了广泛应用。这是因为看一种压电晶体是否有实用价值,除了看其压电系数和机电耦合系数(测量压电晶体机械能与电能之间耦合的重要参数)外,还必须考虑其压电参数对温度和时间的稳定性、机械强度和成型加工性能、化学稳定性以及是否易于获得大块均匀单晶等因素。一些水溶性压电晶体,如酒石酸钾钠(KNT)、磷酸二氢铵(ADP)等,压电模量大,也易于获得大单晶,在 20 世纪四五十年代曾广为应用并一度大量生产,但是由于其稳定性和机械强度较差,易潮解,限制了它们的应用。

通常人们把压电晶体分为非铁电性压电晶体和铁电性压电晶体,非铁电性压电晶体包括锆酸铋晶体、碘酸锂晶体和正磷酸铝晶体等。锆酸铋晶体为  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-GeO}_2$  (简称 BGO),这是一种具有优良性能的电光及压电晶体材料。锆酸铋晶体属于立方晶系,点群对称性为 23, BGO 晶体的压电效应来源于在有效力场的作用下,  $\text{GeO}_4$  阴离子基团结构组成的正四面体中的正电荷中心 Ge 原子的相对位移而发生的极化结果。BGO 晶体具有一次电光效



应、二次电光效应及光电导效应的性质,由于其高对称性,BGO 晶体能产生理想的纯振动模式,由[110]晶片制成的厚度剪切模式的换能器,耦合系数  $k_{15} = 24\%$ ;由[111]晶片制成的厚度伸缩模式的换能器,耦合系数  $k_t = 16\%$ 。BGO 晶体的传声性能优良,SAW 速度较低,适合于制作延时器件,由于它是立方晶体结构,所以 SAW 的传播几乎是各向同性的,这样不但使其在与晶轴成一个角的方向上传播表面波成为可能,而且使其沿着弯曲线周围传播表面波也成为可能。利用这个特点,可以制成环绕式延迟线,使 SAW 沿基片的螺旋形轨迹传播,延迟线的有效长度比基片的物理长度长许多倍,利用它的环形通道传输时不会产生伪表面的特征,制成了延时长达 2.7 ms 的环绕式延迟线。另外一种很有前途的非铁电性压电晶体是正磷酸铝晶体,关于正磷酸铝的研究,虽然在 1935 年就开始了,但是直到 1954 年美国的 Stanley 才成功地在  $c$  轴方向生长出比较大的晶体,到了 1975 年,随着声表面波的发展,需要研究一种能用于体波及声表面波器件的具有较好的温度特性、满意的机械性能和高耦合系数的材料时,这种材料才得到重视和发展。正磷酸铝晶体的优点很多,它的耦合系数在体波与声表面波的应用中比人造石英的大 2~4 倍,磷和铝是很普通的材料,价格又便宜,正磷酸铝晶体可采用与人造石英相同的方法即水热法得到,但它的生长温度与压力比人造石英的低得多,这样既可节约能源又有利于安全。它主要用于制作体波及声表面波元器件,还可以制作压控振荡器、温度补偿晶体振荡器等。

由于铁电性晶体一般都具有良好的压电、热释电和电光性能,因此铁电性晶体的研究也格外引人注目,发展十分迅速。1920 年发现了酒石酸钾钠晶体具有铁电性,1935 年发现了水溶性铁电晶体磷酸二氢钾(KDP)具有铁电性,1945 年发现了钛酸钡晶体具有铁电性,1953 年发现了钛酸铅晶体具有铁电性,1963 年发现了铌酸锂晶体具有铁电性,1996 年成功制备性能优良的铌镁酸铅-钛酸铅(PMNT)和铌锌酸铅-钛酸铅(PZNT)铁电弛豫晶体,它们均具有良好的压电铁电性能。目前铁电性压电晶体已成为最重要的一大类压电晶体材料,并广泛用于电子、激光、超声、水声、微声、红外、导航、生物等各个技术领域。

通常采用的铁电性单晶体有含氧八面体的铁电晶体,如具有钙钛矿结构的钛酸钡、钛酸铅晶体、锆钛酸铅晶体,具有铌酸锂结构的铌酸锂晶体和钽酸锂晶体等,另外还有含氢键的铁电晶体,如磷酸二氢钾( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ )和磷酸氢铅( $\text{PbDPO}_4$ )。铁电性压电单晶通常采用熔盐法、提拉法或坩埚下降法制备。由于铁电性压电晶体通常热导率低,晶界能高,当晶体冷却通过居里点时,在内应力作用下易自行开裂,故很难制备成大的单晶,而且铁电单晶的压电性能较差,因此铁电性压电晶体作为压电或热释电材料使用时,多采用陶瓷或薄膜材料的形式,从而导致了压电陶瓷和压电薄膜等材料的研究。

第二次世界大战对压电材料的研究起到了巨大的推动作用,研究发现磷酸二氢铵(ADP)比罗谢尔盐更适合做潜艇声学研究。这个时期,A.V.Shbnikov 预言非晶体和多晶体也存在压电效应,这个预言后来分别被证实了。在 1946 年左右,A.Von Hippel、B.Wul、

A.Rzhanov、T.Ogawa 和 Smolensky 等人分别对钛酸钡和钙钛矿类进行研究,发现它们具有很强的铁电特性,到了 1947 年,美国的 Roberts 才发现其压电性。这些发现极大地促进了铁电陶瓷特性的研究及它们在各种器件和系统中的广泛应用。从这以后,压电陶瓷的发展较快,在不少场合已经取代了压电单晶,促使压电单晶向新的领域迈进,当前陶瓷、薄膜、聚合物和复合材料是压电材料和器件的几类主要材料。

20 世纪 50 年代初期,为了进一步改善  $\text{BaTiO}_3$  陶瓷谐振频率的温度稳定性,人们一方面对  $\text{BaTiO}_3$  陶瓷进行改性,另一方面研究以铌酸铅为代表的铌酸盐固溶体的压电性。1954 年, Jaffe 等人公布了锆钛酸铅 (PZT) 固溶体陶瓷压电性能的研究结果,发现锆钛酸铅 (PZT) 固溶体在类质异晶相界附近具有优异的物理性能,它的机电耦合系数、压电常数、机械品质因素、居里温度和稳定性都有不少改善,它的出现大大扩展了压电陶瓷的应用领域,从而使压电陶瓷不仅用于一般的滤波器和换能器,而且还可以用于水下通信、电声、变压器、引燃引爆装置和超声延迟线,促进了新型压电材料和器件的研究。PZT 压电陶瓷于 1954 年在美国获得了专利权,但 1953 年日本就公布了  $\text{PbZrO}_3$  和  $\text{PbTiO}_3$  固溶体的相图。图的中间部分相当于 PZT,遗憾的是日本未将基础研究和应用研究结合起来,没有研究 PZT 的压电性,因而失去了专利权。此后在 1965 年,日本松下电气公司的科研人员在二元系 PZT 组成中加入  $\text{PbO}_3$ ,试制成了三元系压电陶瓷,命名为 PCM。PCM 是透明压电陶瓷,其性能可以与 PZT 相媲美,它的出现使新型压电陶瓷的研究更加活跃。

上述 PZT 等压电陶瓷均含有大量的铅,制造过程会导致环境污染,因而国内外科研人员开展了  $\text{K}_{1-x}\text{Na}_x\text{NbO}_3$  等无铅压电陶瓷的研究。与含铅系压电陶瓷材料相比,无铅系压电陶瓷的性能明显不同于含铅系压电陶瓷,如无铅系压电陶瓷的居里点约高出  $200\sim 300^\circ\text{C}$ ,介电常数仅为  $140\sim 150$ ,机械品质因数高达  $4\,000\sim 7\,000$ 。但是无铅系压电陶瓷的机电耦合系数等性能远不如含铅系压电陶瓷,加之制造工艺难于控制,故无铅系压电陶瓷仅在一些特定领域应用,其研究工作仍在进行中。1971 年,美国 Haertling 和 Land 用 La 置换一部分 Pb 的  $\text{Pb}_{1-x}\text{La}_x(\text{Zr}_y\text{Ti}_{1-y})_{1-(x/4)}\text{Q}_3$  组成,所得的陶瓷研磨成的薄片具有电控可变双折射、电控可变量散射等特性,可用做光阀、光电调制器和光记忆元件。PLZT 是一种很有价值的新型电子材料,是 20 世纪 70 年代铁电陶瓷的重要进展之一,它的出现使压电陶瓷的应用扩展到光电领域。

近 20 年来,压电陶瓷的应用领域不断扩大,不同的压电器件对压电陶瓷的性能提出了特定的要求。为了达到设计各类压电器件对压电性能的不同要求,材料研究人员在单元系、二元系、三元系、四元系压电陶瓷的基础上广泛地研究了组成和添加剂,有的研究单位几乎把化学元素周期表中所有可以组合的元素都进行了组合实验。当前,各种压电陶瓷已能满足设计压电器件的一般要求,但随着应用领域的扩展,越来越要求更高性能的压电陶瓷。20 世纪末期,适用于高频范围的钛酸铅系和铌酸盐系等压电陶瓷引起材料研究者的

高度重视,它们可广泛用于无损检测、医疗诊断、水听器和各种形式的传感器。

压电聚合物是过去 30 年间发展起来的另一类新型压电材料,对于有机高分子压电性的认识,最早可以追溯到 20 世纪 20 年代,当时发现将某些橡胶和明胶在电场下冷却,可以产生微弱的压电性。由于这种压电性很弱,一直未引起广泛的重视。1941 年, Martin 发现角质蛋白质具有压电效应。此后一段时间内,研究一直集中于生物高分子材料。20 世纪五六十年代, Fukada 陆续在木材、骨头、肌腱、多糖体及 DNA 中发现正压电效应,并且证实木材中存在逆压电效应。随后 Fukada 还研究了合成高分子和生物高分子拉伸膜的压电效应,阐明了光活性高分子单轴拉伸膜的压电特征,进一步拓宽了该研究领域。对压电聚合物真正获得突破性研究是在 1969 年 Kawai 对聚偏氟乙烯的研究,研究发现经单轴拉伸,并在高温强电场下极化的 PVDF 薄膜具有合成高分子材料中最强的压电效应,并具备工业使用价值。1971 年, Bergman 等进一步发现了 PVDF 的热释电效应。这些结果表明, 20 世纪 40 年代已成功合成的 PVDF,不仅具有机械强度高、化学性能稳定、易于加工等独特性能,可作为耐腐蚀材料和绝缘材料,而且还可作为能量转换的功能材料。由于 PVDF 具有很强的压电性和热释电性,而且与其他高分子材料一样,易于制成大面积薄膜和不规则形状,尤其是其密度很小,声阻抗很低,能与水或人体形成良好的匹配,在自动控制、微机电一体化和生物医学工程等领域具有广泛的应用前景。在随后 20 年中,人们对 PVDF 及其与聚三氟乙烯 (TrFE) 和聚四氟乙烯 (TeFE) 形成的共聚物进行了广泛深入的研究。

Wang 和 Nalwa 在其专著中分别论述了压电聚合物的实际和潜在应用领域,压电聚合物主要的应用领域可以粗略地分为两大类,即振动能-电能换能器应用,包括电声换能器、水声换能器和超声换能器等,以及其他传感器和驱动器应用。

到 20 世纪 80 年代初,人们为了开发各种水声传感器,试图寻找一种兼有陶瓷和聚合物两者优点并能抑制各自缺点的新材料,从而开始了陶瓷-聚合物压电复合材料的研究。早期压电复合材料是用烧结过的压电陶瓷微粒(直径为  $5\text{ }\mu\text{m}$ )作为填料加入到聚氨酯中,制成聚氨酯压电橡胶。实验证明,这种将压电陶瓷微粒与有机聚合物按一定比例机械混合的方法,虽然可制备出具有一定性能的压电复合材料,但这种材料远未发挥两组分的长处。原因是在材料设计中应考虑两组分性能之间的“耦合效应”。因此, Newnham 提出复合材料中各组分之间的“连通性”的概念。

压电复合材料是一种多相材料,它是由压电陶瓷和高分子聚合物等材料通过复合工艺构成的一种新型材料。这种材料不仅能保持原组分,通过复合效应还能使其具有原组分材料所不具备的性能。复合材料的复合效应包括加合效应和乘积效应等,加合效应是指复合材料组成相的单相性能,通过一定的加合构成复合材料的总体性能,乘积效应是利用复合材料两相的不同性能,通过两相的相互作用产生第 3 种性能,如现已大量生产的自控发热体就是由颗粒导电材料和高分子基体复合所组成的复合材料。对此材料通电因既有电阻发

热，热又使高分子聚合物膨胀变形，从而破坏了导电体的通路，使电阻增大而降温，如此相互作用最终达到一个平衡温度。压电复合材料的压电效应不仅取决于构成该材料各组分性能，而且还与各相间的连通方式有关，每个相相互间的连通性是决定压电复合材料总体性能的主要因素，因为连通性控制电通的路径和机械性能。在压电复合材料中，每个相可以以 0、1、2、3 维方式自我连通。习惯上把对功能效应起主要作用的相放在前面，如压电陶瓷和聚合物二相复合材料，前一数字表示陶瓷相，后一数字表示聚合物相。两相复合材料最简单的是 0-3 型，在这种材料中，陶瓷相以 0 维方式自连，聚合物以 3 维方式自连，即互不连通的压电陶瓷微粒悬浮在 3 维自连的聚合物基体中。

压电复合材料的制备方法主要有混合热压法、流延法、排列灌注法、切割填充法、复型法、BURPS 工艺以及熔化沉积 (FD) 工艺等。由于压电复合材料是由陶瓷与聚合物两相组成，所以这种材料需加高强度的电场才能充分极化，如对 0-3 型压电复合材料极化电场要比只是压电陶瓷的电场大 100 倍左右。

压电复合材料经过几十年的研究已取得丰硕的成果，相继研制成功 1-3 型、2-2 型、3-2 型、3-3 型，以及月牙和帽状结构复合材料，使性能大幅度提高。随着压电复合材料制备工艺的深入研究，为了提高复合材料的性能，迫切要求在大量实验的基础上抽象出理论模型，建立复合材料宏观性能与其组分及内部结构间的关系，以便指导材料的设计。具有代表性的理论主要有：Furukawa 模型、Yamada 模型和 Banno 的改进立方模型。Furukawa 模型假设分布在聚合物基体中的压电陶瓷为球状颗粒，而 Yamada 模型则假设为椭球状颗粒。这两种模型均通过分析作用在压电颗粒的局部场与外场的关系，求解复合材料的压电性能。但模型仅对局部场做了粗略的分析，不能给出局部场随复合结构变化的细节，因此只能局部半定量地预测压电复合材料的性能。Banno 改进立方模型在连通性概念的基础上，对两相复合结构做了进一步分析，并完整地解析了复合材料的压电、介电和弹性性能。

近几十年来，随着凝聚态物理研究的发展，各国学者从统一的热力学唯象理论出发，来描述热平衡态固体电介质的各种性质。20 世纪 40 年代，V.L.Ginzburg 和 A.F.Devenshire 唯象地描述了压电和铁电学的特性。周志刚等人从统一的热力学特征函数出发，解释了压电效应等物理效应。热力学理论是一种宏观唯象理论，是在实验基础上建立起来的物质系统的宏观参数之间的相互关系，而不能由某个基本的关系导出。热力学理论统一地说明了在外电场、外力和温度等各种外界因素影响下，电介质的电偶极矩所形成的宏观极化强度的变化规律，而不涉及微观机构问题。因此，压电效应的数学描述中所涉及的物性参数都是从实验中获得。这种宏观唯象理论虽不能解释物理效应的根源，但却能建立起各种宏观物理量之间的关系，从而为压电效应的研究提供了新的研究手段。因此，宏观的唯象理论的建立是研究压电材料的基础。

我国对压电效应和压电材料的研究是以中国科学院上海硅酸盐研究所、中国科学院北

京声学研究所和四川压电与声光技术研究所为主进行的,此外还有上海测试研究所、大连理工大学、东南大学等高校和研究所也开展了理论与实验方面的研究工作。通常压电介质数值计算结果和通过压电机构获得的实际数据之间存在明显的误差,而这种误差正是压电机构测试精度和控制分辨率的衡量标准,因此,误差分析在压电机构的设计制作中显得至关重要。孙宝元教授从1978年就开展了压电介质检测灵敏度分布规律的研究工作,充分分析了影响灵敏度的各种因素,如晶体切型精度、向间干扰、测量电路的绝缘阻抗等,通过选择 $Y0^\circ$ 切型的石英晶片进行实验,分析得到了灵敏度分布曲线和灵敏度拟合方程。这些研究成果目前已应用在我国第一个压电石英三向力传感器和第一台压电石英三向测力仪上。

## 1.2 基于晶体变形效应研究简介

基于晶体变形的三维压电效应研究属晶体物理学、电介质物理学、静电学、弹性力学和实验力学等多学科交叉研究的前沿课题,如果说纵向、横向和剪切等压电效应研究是从晶体应力角度出发揭示了机电耦合与变换的内在规律,那么拉压效应、扭转效应、弯曲效应研究则是从晶体变形上反映了压电晶体的上述规律。基于晶体变形压电效应研究将压电效应从二维发展到三维,从线性极化发展到非线性极化,束缚电荷从单电极提取发展到多电极复合提取……从而在一定程度上发展了压电学科的理论体系。

### 1.2.1 压电弯曲效应研究

从上百年的发展中我们可以看到,尽管石英晶体是最早的压电材料,但石英晶体器件的性能仍在不断地改善,并呈现出加速度的发展趋势,例如,石英晶体的稳定性每五六年就可以提高一个数量级。但是,压电效应的研究并未终结,科学技术的发展和生产工程的需要是其持续发展的动力。目前国内外工程学术界关于压电晶体弯曲效应的定义和概念尚未明确提出,是因为压电晶体在弯矩作用下而产生的弯曲效应是拉伸力和压缩力共同作用的复合结果,所以往往把压电晶体弯曲效应归结为拉压效应的复合效应。但由于晶体内部所产生的应力具有对坐标的线性性质,因而本文把弯曲效应作为压电效应的一种形式进行研究,并给出压电弯曲效应明确的定义。压电弯曲效应按产生机理的不同分为正、逆压电弯曲效应。当压电晶体受到弯矩作用时,在压电晶体的某些表面上有电荷的积累,称为压电晶体的正压电弯曲效应;将电场加到压电晶体上时,压电晶体会产生弯曲形变,这种现象称为压电晶体的逆压电弯曲效应。压电晶体弯曲效应的研究较多地是集中在压电弯曲振动的应用上,即利用压电材料来实施弯曲运动,主要表现在以下几个方面。

### 1. 研究压电晶体的弯曲振动

最具有代表性的研究者有瑞典 Uppsala 大学的 Jan Söderkvist, 他研究了不同的驱动电极配置所导致的石英晶体的弯曲振动情况及所产生的相应电荷分布。日本东京大学的 Hiroshi Toshiyoshi 等人提出一种手风琴式的石英斩光器, 如图 1-1 所示, 目的是把它应用在微光学中来改变光纤中的光路。

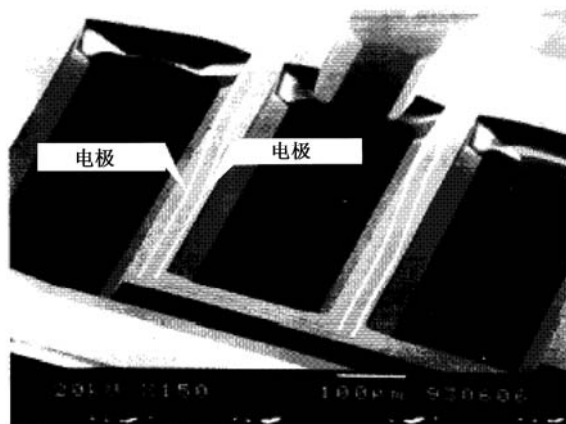


图 1-1 石英斩光器悬臂上电极布置的电镜照片

哈尔滨工业大学的荣伟彬等人研制出压电陶瓷管驱动的自由度微操作手, 结构如图 1-2 所示。它由两段压电陶瓷管器件组成, 共 3 个直线运动自由度, 其中上面的一段为  $Z$  轴, 下面的一段为  $X$  轴和  $Y$  轴。当在  $Z$  轴压电陶瓷管器件的内外管壁上施加电压时, 它将沿轴向伸缩, 从而实现  $Z$  轴的微动。将  $X$  轴和  $Y$  轴压电陶瓷管的外表面的电极按  $90^\circ$  间隔平均分割成 4 份, 当在相对的两个电极上施加大小相等、方向相反的电压时, 压电陶瓷管将在该方向上产生弯曲变形, 从而产生  $X$ 、 $Y$  两个方向上的微动。这 3 项研究启发了利用压电晶体弯曲效应研制微型雕刻装置——压电雕刻笔式执行器的研究思路。

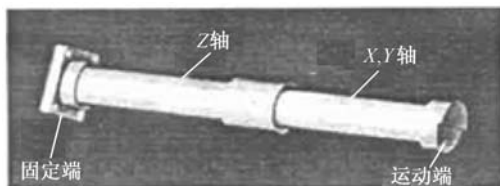


图 1-2 微操作手的结构

## 2. 压电弯曲效应的理论研究

美国波士顿大学的 Jan G.Smits 等人研究了压电双晶片的本构方程,推导出压电双晶片在各种机械边界条件下的特性方程。中国西安交通大学的王志宏等人用类似的方法研究了单体压电片状执行器端部致动位移和驱动电压之间的关系。这两项研究为研究石英晶体基本切型的逆向压电弯曲效应提供了参考。

利用石英晶体弯曲效应研制的压电石英谐振器已广泛地应用于通信、导航、频率标准和自动控制等各个领域。此外,像管道机器人、硬盘中应用的压电复合磁头悬浮臂、原子力显微镜中扫描探针的微悬臂等都是利用压电晶体的弯曲效应研制的。

### 1.2.2 压电扭转效应研究

石英晶体是最早的压电材料,石英晶体的压电模量虽然不很大,但机械强度、稳定性都很好,用水热法又可以容易地培养出大尺寸的优质单晶,加之其特殊切型的零温度系数等特性,使这一古老压电晶体长盛不衰,不断有新的应用,成为最广泛应用的一种功能晶体。目前它仍然得到广泛的研究,如高新技术对人造石英晶体的品质要求日益严格,需要高纯度、高  $Q$  值、低位错及腐蚀隧道密度小的晶体来适应高频化、小型化、片式化元器件的需要;又如,石英晶体器件的性能仍在不断地改善,并呈现出加速度的发展趋势。石英晶体的稳定性每五六年就可以提高一个数量级,但是石英晶体压电效应的研究并未终结。目前国内外工程学术界尚未明确提出压电晶体扭转效应的定义和概念,是因为压电晶体在扭矩作用下而产生的扭转效应是正剪切和负剪切共同作用的复合结果,所以往往把压电晶体扭转效应归结为剪切效应的复合效应。为了工程应用的需求,本文把扭转效应作为压电效应的一种形式进行研究,并给出压电扭转效应明确的定义。压电扭转效应按产生机理的不同,分为正、逆压电扭转效应。当压电晶体受到扭矩作用时,在压电晶体的某些表面上有电荷的积累,称为压电晶体的正压电扭转效应;将电场加到压电晶体上时,压电晶体会产生扭转变形,这种现象称为压电晶体的逆压电扭转效应。

目前,有关压电扭转效应的研究较多集中在压电扭转复合材料组成、压电扭转换能器与压电扭转超声马达等方面,即利用压电材料来实施扭转运动,主要表现在以下几个方面。

#### 1. 压电扭转复合材料的组成

中国科学院声学研究所早期 1-3 型压电复合材料静态、动态特性及应用研究的基础上,开展了 2-2 型压电复合材料的研究,如图 1-3 所示。



图 1-3 2-2 型压电复合材料横波换能器

该研究将直角坐标系下的普通 2-2 型压电复合材料按照极化方向沿圆周方向，一致排列组成一种可以模拟圆柱的 2-2 型压电复合材料，并用这种压电材料制作了产生扭转振动的横波换能器，同时对换能器产生的声波波形进行了分析。

2. 压电扭转换能器的研制

陕西师范大学应用声学研究所的孙国武等对矩形扭转压电换能器进行了研究，他们用多片（一般为偶数）矩形压电片在平面内拼接成单层振子，每个压电片内可产生切向极化，从而在外部呈现出纯扭振动，并对它的频率特性从理论上进行推导，用实验加以验证。该研究所的林书玉等对夹心式压电超声扭转振动换能器进行设计与开发，这是利用沿切向极化带孔的压电陶瓷圆片的方法，推出了换能器共振频率方程，并对有关影响扭振频率的因素进行了定量分析。但是，这种切向极化压电陶瓷圆片的工艺目前国内尚不完善，有待进一步提高。扭转换能器原理图如图 1-4 所示。

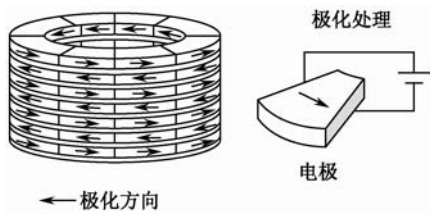


图 1-4 扭转换能器原理图

3. 压电石英晶体扭转振动的研究

最具有代表性的研究者是瑞典 Upplasa 大学的 Jan Söderkvist 和日本的 Hirofumi Kawashima 等人。他们研究了不同的驱动电极配置下的石英晶体的扭转振动情况，并对相应产生的电荷密度和电场进行了研究，最终研制成功了角速率传感器，如图 1-5 所示。



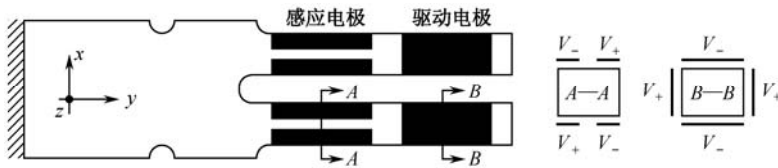


图 1-5 角速率传感器结构简图

#### 4. 压电扭转执行器的研究

日本 Tokin 公司采用特殊电极制作出了一种简单可靠的压电致动器，去掉了普通压电陶瓷致动器需要的旋转变换机构。该致动器主要特点是在压电陶瓷圆筒表面上涂敷交变曲折电极，这种电极与陶瓷圆筒中心线倾斜成  $45^\circ$ ，利用它进行极化并控制陶瓷圆筒扭转运动。这种致动器已应用在 X-Y 工作台上进行微位移调节，控制微小的转角和激光反射镜的微角度调节。此外，日本的布田良明也在中空压电陶瓷圆柱体外周面上布置倾斜  $45^\circ$  的叉指电极，即在外径 60 mm、长 25 mm 的压电致动器上形成导体宽度和间隙比为 0.3 的叉指电极，用  $\pm 1\,200\text{ V}$  电压可获得  $\pm 350\text{ }\mu\text{rad}$  的扭转角度。

图 1-6 所示为 A.E.Glazounov 等人利用放大的剪切效应制造的管形扭转执行器的原理，在图 1-6 (a) 中表示一片压电陶瓷片的极化与变形情况，外电场  $E$  垂直于压电陶瓷片极化方向，所以在外加电场的作用下能产生沿圆周切向的变形。图 1-6 (b) 所示即为由偶数个这样的压电陶瓷片粘贴在一起组成的管形执行器，当它们被施加图中所示的电场时，会产生协调一致的圆周扭转位移。

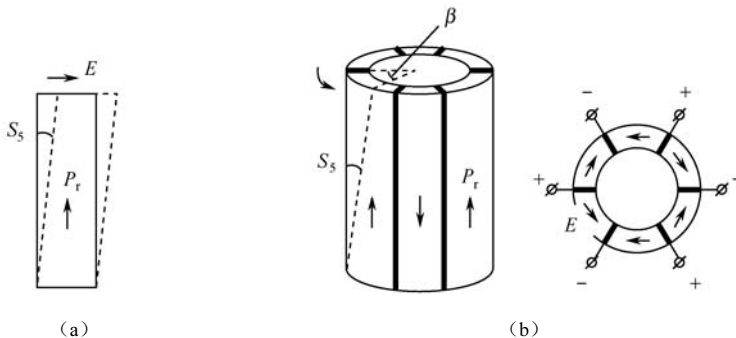


图 1-6 基于剪切效应扭转执行器的原理

#### 5. 压电扭转超声马达的研究

图 1-7 所示为 O.Ohnishi 等人研究成功的定子与转子式压电扭转超声马达。该马达主

要由两种类型的压电陶瓷片组成，上层由 20 层压电陶瓷叠堆组成，每层压电片都是厚度极化，从而整个上层压电陶瓷片能实现纵向振动。下层由 8 层压电陶瓷叠堆组成，每个压电片都是切向极化，能实现扭转振动。该压电扭转超声马达的工作原理是：首先在下层压电陶瓷叠堆中施加交变电场，产生扭转振动，由于摩擦，转子被带动后会沿轴转动，这时上层压电陶瓷叠堆产生轴向振动，对转子产生轴向冲击力，使转子脱离定子而自由转动，由于重力作用，转子会下落与定子重新接触，从而周而复始，实现扭转运动。

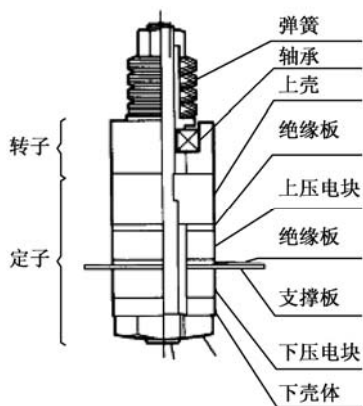


图 1-7 压电扭转超声马达的结构图

## 第2章

# 压电效应晶体物理学基础

对物质压电特性的认识是从晶体学开始的，晶体的宏观物理性质决定着它的压电性能，而晶体的物理性质又与它的结构密不可分，因此了解有关晶体结构及其物理性质将有利于更深入地研究晶体的压电特性。本章从晶体结构的对称性和晶体学点群的角度出发，分析石英晶体微观对称性与压电效应的必然联系，并用热力学原理分析压电效应本构方程及相应边界条件。

## 2.1 晶体结构与对称性

晶体材料的压电特性与晶体的结构密不可分，因此在讨论压电性质之前，应该具备晶体物理学基础知识。晶体物理学是从晶体的宏观对称性来研究晶体物理性质的学科。

### 2.1.1 晶体及其点阵结构

1912年，德国科学家 Laue 通过晶体对 X 射线的衍射实验证实：一切晶体都是由空间规则排列的微粒（原子、离子、分子）组成的固体。晶体内部微粒的规则排列如同一种格子构造。因此，晶体是内部微粒（原子、离子、分子）按一定规则周期排列而具有格子构造的固体，其空间排列从微观来说是近似三维无限广延的，这就是所说的长程有序性。

## 1. 晶体的宏观特征

晶体各种粒子的空间关系及其相互作用决定了晶体宏观上的一些共同特性，概括地说有以下几点。

### 1) 几何自范性

晶体都具有自发形成闭合多面体外形，并以此占有一定空间范围的性质，晶面角守恒就是自范性的一种体现。

### 2) 平移均匀性

大块的晶体是由细小的晶胞堆积而成的，每个微小晶胞都体现了晶体整体的物理特征，晶体的宏观物理性质都可用每个微小晶胞的宏观物理性质来表示，这就是晶体宏观物理性质的平移均匀性。

### 3) 各向异性

晶体的宏观物理性质随观测方向不同而有所差异的性质称为各向异性。

### 4) 对称性

晶体的外形在自身的不同方位上自相重合的现象称为晶体形状的宏观对称性，而晶体的内部结构在不同位置上有规则地重复出现称为晶体形状的微观对称性。晶体形状的对称性取决于晶体的内部结构，都是微观结构在宏观上的反映。晶体形状的对称性将决定晶体宏观物理性质的对称性。

### 5) 稳定性或具有最小内能性

构成晶体粒子的规则排列是它们之间相互作用的引力与斥力达到平衡的结果。在相同热力学条件下，同一种化学成分的物质，物相不同时，以晶体状态存在时内能最小，因此最稳定，非晶态的物质有自发转变为晶体的趋势。

## 2. 晶体的点阵结构

晶体在空间上的长程有序周期排列可用点阵来描述。点阵是指由晶体中等同点（对于一特定的空间点来说，由于空间周期性，在空间的另一位置可以找到与它的微观环境或物理性质完全相同的点）构成的空间图像，图 2-1 所示为岩盐的晶体结构示意图。

在点阵中，可以从任意一个阵点出发，向它邻近的阵点做出 3 个不相平行的矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ ，这 3 个矢量就是点阵中阵点在这些方向上的重复周期。也就是说，从点阵中任意一个阵点出发，以这 3 个矢量为重复周期，可以做出点阵中所有的阵点，这 3 个矢量称为阵点的平移基矢，简称基矢。以点阵中 3 个线性无关的基矢为棱，可以构造单位平行六面体，称为晶胞。因此，空间点阵可以看成阵点仅位于其角顶上的无数个晶胞平行重叠而成的空间格子。

晶体学中，通常把单位平行六面体的 3 个基矢选做坐标轴，分别用  $a$ 、 $b$ 、 $c$  或  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  表示。它们的方向定义为： $c(Z)$  轴位于竖直方向，自原点趋向上方为正方向； $b(Y)$  轴位于水平方向，自原点趋向右方为正方向； $a(X)$  轴位于前后方向，自原点趋向前方为正方向，如图 2-2 所示。

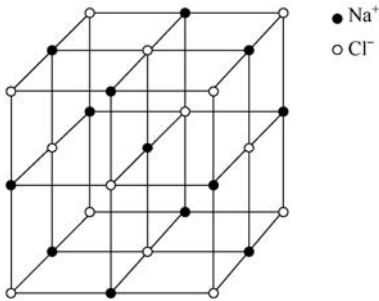


图 2-1 岩盐的晶体结构示意图

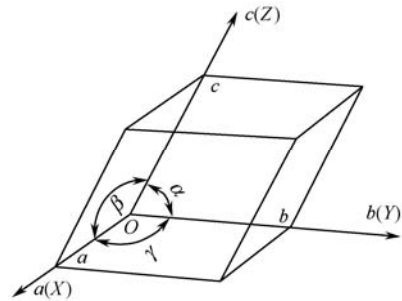


图 2-2 点阵参数（格子参数）

各轴间的夹角按以下方式定义

$$\gamma = ab, \quad \alpha = bc, \quad \beta = ca \quad (2.1.1)$$

$a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  是表征单位平行六面体形状和大小的一组参数，称为点阵参数或格子参数。由于受到空间点阵对称性的限制，晶体结构的点阵只能有 14 种类型，即 14 种 Bravais 格子。若以点阵参数为特征，这 14 种点阵可以归纳为 7 种类型，即 7 类晶系，如图 2-3 所示。

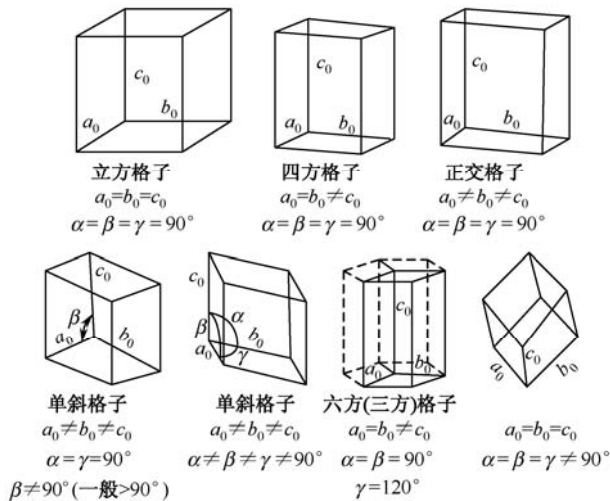


图 2-3 7 类晶系及其点阵参数

## 2.1.2 晶体对称性及对称元素

晶体的外形具有规则的对称性,这种对称性是指对晶体进行一定的操作后,晶体能够自身重合。晶体对称有宏观对称与微观对称,微观对称是指从晶格的角度出发,在认为整个晶格近似为三维无限广延的情况下的空间平移、转动、反演操作下的对称,这种对称性构成晶体的 230 种空间群;而宏观对称性指有限体积的规则晶体外形的对称性,它不包含平移对称性。

### 1. 对称操作与对称要素

晶体的对称性是通过某种变换或操作实现的,这种变换或操作称为对称变换或对称操作。在对称操作中,那些假想的、不动的几何要素(点、线、面)称为对称要素。通常晶体的宏观物理性质只与宏观对称要素有关。晶体的宏观对称要素可分为以下几类。

#### 1) 对称中心

它是一个假想的定点,其相应的对称变换称为反演。若把对称中心作为坐标原点,则对称中心的作用是将点  $(X, Y, Z)$  变换到点  $(-X, -Y, -Z)$ 。如果通过对称中心作任意一条直线,则在直线上距对称中心等距离的亮点,必定以此对称中心联系着对称点。如果某晶体具有对称中心,则该晶体的每一个晶面都有一个与它反向平行的对称晶面。对称中心的记号为  $C$ 。

#### 2) 对称面(镜面)

它是一个假想平面,其相应的对称变换称为反映。一个面经过对称面反映后,必然变换到其镜像的位置上。如果作垂直于对称面的任意一条直线,则在直线上距对称面等距离的两点,必然是该对称面联系的对称点。如果某个晶体有对称面,则该对称面将晶体分为互称镜像的两个等同部分。对称面的记号为  $P$ 。

#### 3) 旋转轴

它是一条假想的直线,其相应的对称变换称为旋转。图形本身旋转到一定角度后能自相重合。有些图形旋转几个不同的角度都能重合,将其中最小的角度称为基转角,以  $\alpha$  表示。由于任何有限图形在旋转一周后,必自相重合,因此基转角  $\alpha$  必能整除  $360^\circ$ , 即

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = n \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (2.1.2)$$

式中,  $n$  是图形在围绕旋转轴旋转一周的过程中晶体相同部分重复的次数,称为旋转轴的轴次。

由于受内部点阵构造的限制,晶体内存在的旋转轴的轴次不是任意的,只能有 1、2、

3、4及6次旋转轴,不可能有5次或高于6次的旋转轴。若这些旋转轴是晶体中唯一的对称要素,则这些轴称为极轴,晶体在极轴两端的性质是不相同的。旋转轴的记号为 $L^n$ ,如3次轴为 $L^3$ 。

#### 4) 旋转倒反轴

这是一种复合的对称要素,其相应的对称变换称为旋转倒反,即在绕轴旋转后,紧接着对该轴上的一个定点进行倒反。应该指出,旋转和倒反两个动作是紧密连接、不可分割的。倒反点是旋转倒反轴的一个组成部分,它并不一定能够以独立对称中心的形式存在。一般来说,一个旋转倒反轴并不总是一个旋转轴和一个对称中心的组合。旋转倒反轴的记号为 $L_i^n$ ,其中 $i$ 为倒反, $n$ 为轴次。

与旋转轴一样,在晶体中也只能存在1、2、3、4、6次旋转倒反轴。但需要注意的是,1次旋转倒反轴和对称中心的效果相同;2次旋转倒反轴和一个垂直于该轴的对称面的效果相同,如图2-4所示。6次旋转倒反轴和3次旋转轴与一个垂直于该轴的对称面的组合效果相同。

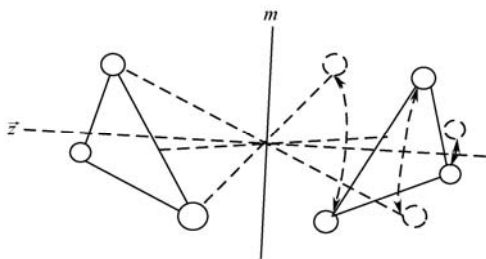


图 2-4 2 次旋转倒反轴与对称面的关系

## 2. 晶体对称性的限制

由于晶体的外形与它的微观结构是密切相关的,且微观结构的对称性是宏观外形对称性的基础,所以晶体的对称性必然受到晶格微观平移对称性和晶体多面体的宏观有限性的共同限制,主要表现在以下两点。

(1) 晶体多面体的宏观有限性要求所有的宏观对称操作的对称要素必须相交于一点。

(2) 晶体的旋转轴一定要受到晶体点阵结构的限制,旋转对称轴的取向必与点阵中的一组直线点阵平行,而与一组平面点阵垂直,同时旋转对称轴的阶次也不是任意的。

可以证明,理想晶体可能的全部独立点对称元素共有8种,它们是1、2、3、4、6、 $i$ 、 $m$ 、 $\bar{4}$ ,即1次轴、2次轴、3次轴、4次轴、6次轴、反映镜面、4次反轴。

晶体宏观对称要素及其符号如表 2-1 所示。

表 2-1 晶体宏观对称要素及其符号

对 称 要 素		熊夫利符号	国 际 符 号	习 惯 符 号
对称中心		$C_i$	$\bar{1}$	$C$
对称面		$C_s$	$m$	$P$
旋转轴	1 次旋转轴	$C_1$	1	$L^1$
	2 次旋转轴	$C_2$	2	$L^2$
	3 次旋转轴	$C_3$	3	$L^3$
	4 次旋转轴	$C_4$	4	$L^4$
	6 次旋转轴	$C_5$	6	$L^6$
旋转倒反轴	1 次旋转倒反轴	$C_i$	$\bar{1}$	$C$
	2 次旋转倒反轴	$C_s$	$m$	$P$
	3 次旋转倒反轴	$C_{3i}$	$\bar{3}$	$L_i^3$
	4 次旋转倒反轴	$S_4$	$\bar{4}$	$L_i^4$
	6 次旋转倒反轴	$C_{3h}$	$\bar{6}$	$L_i^6$

2.1.3 晶体的分类

晶体的宏观对称性是按其宏观点对称操作所构成的点群来进行分类的。群是一个代数理论中的抽象概念，满足一定条件的一些元素的集合称为群。设集合  $\{E, A, B, C, \cdots\}$  满足下列条件，则称为群，记为  $G\{E, A, B, C, \cdots\}$ 。

(1)（封闭性）存在某种代数运算，使这个集合中的任意两个元素  $A$ 、 $B$  的联合  $C$ ，仍是集合中的一个元素，即有

$$AB=C$$

(2.1.3)

(2)（结合律）集合中的任意元素  $A$ 、 $B$ 、 $C$  满足结合律

$$(AB)C=A(BC)$$

(2.1.4)

(3)（单位元素）集合中包含一个恒等元素，它满足

$$AE=EA=A$$

(2.1.5)

(4)（可逆元素）集合中的每个元素  $A$ ，都有对应的逆元素  $A^{-1}$ ，且  $A^{-1}$  也属于这个集合，即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

(2.1.6)



把晶体宏观点称操作当做元素，它们满足上述代数中群的定义，就把点对称操作（各对称要素（点、线、面）都交于一点）的集合构成的群称为点群。

晶体的独立宏观对称元素共有 8 种，一个具体的宏观对称要素不外乎是这 8 种对称要素的一种或几种组合。在晶体中，可以只存在一个对称要素，也可能由若干个对称要素组合在一起。不同类型的晶体，其对称要素数目的组合情况各不相同。根据对称情况，把对称性相同的所有晶体归为一类，叫做晶类。在晶体中共有 32 种对称型，也就有 32 个晶类。由于每个晶类中的所有对称要素至少交于一点，所以把这些共点的宏观对称要素的集合所构成的对称群称为点群，32 个晶类即对应于 32 种点群，如表 2-2 所示。

表 2-2 晶体的分类

晶 族	晶 系	对 称 特 点		所 属 晶 系
低级晶族 (双轴晶)	三斜晶系	无高次轴	只有 1 次轴（旋转轴或旋转倒反轴）	$1, \bar{1}$
	单斜晶系		只有一个 2 次轴 (旋转轴或旋转倒反轴)	$2, m, 2/m$
	正交 (斜方) 晶系		3 个互相垂直的 2 次轴 (旋转轴或旋转倒反轴)	$222, mm2, mmm$
中级晶族 (单轴晶)	四方晶系	只有 一个高次轴	唯一的高次轴为 4 次 (旋转轴或旋转倒反轴)	$4, \bar{4}, 4/m, 422, 4mm, \bar{4}2m, 4/mmm$
	三方晶系		唯一的高次轴为 3 次 (旋转轴或旋转倒反轴)	$3, \bar{3}, 32, 3m, \bar{3}m$
	六方晶系		唯一的高次轴为 6 次 (旋转轴或旋转倒反轴)	$6, \bar{6}, 6/m, 622, 6mm, \bar{6}m2, 6/mmm$
高级晶族 (光学均质体)	立方晶系	多于 一个高次轴	在立方体体对角线方向有 4 个 3 次轴	$23, m\bar{3}, 432, \bar{4}3m, m\bar{3}m$

晶体的 32 种点群又可以按有无反演中心分为两大类，不具有反演中心的晶体又可分为极性晶类和非极性晶类，如表 2-3 所示。

表 2-3 32 种点群按有无反演中心分类

不具有反演中心的晶类（共 21 种）	极性晶类（共 10 种）	$1, 2, 3, 4, 6, m, mm2, 3m, 4mm, 6mm$
	非极性晶类（共 11 种）	$222, 23, 32, 422, 432, \bar{4}, \bar{4}2m, \bar{4}3m, 622, \bar{6}, \bar{6}2m$
具有反演中心的晶类（共 11 种）	$\bar{1}, 2m, mmm, \bar{3}, 3m, 4/m, 4/mmm, 6/m, 6/mmm, m\bar{3}, m\bar{3}m$	

## 2.2 晶体宏观物理性质与晶体对称性

晶体的宏观物理性质是指晶体对外界施加的各种作用的响应，它由宏观可测物理量之间的关系来定义。晶体的宏观物理性质都用张量来描述，它受到两种完全不同的对称性的影响：一是晶体本身对称性（晶体所属点群）对宏观物理性质的影响；二是热力学关系（守恒定律）赋予物理性质本身的固有对称性对宏观物理性质的影响。

### 2.2.1 晶体的宏观物理性质

物质宏观物理性质的物理量由宏观的可测物理量之间的关系来定义。例如，物质的密度  $\rho$  是由质量  $m$  和体积  $V$  之间的关系

$$m = \rho V$$

来定义的。又如，电极化率  $\chi$  则是由施加于材料上的电场强度  $E$  和由此感生的电极化强度  $P$  之间的关系

$$P = \varepsilon_0 \chi E$$

来定义的。上述的  $m$ 、 $V$ 、 $P$ 、 $E$  等都是可测物理量。

一般而言，若可测物理量之间的关系为线性，则可采用

$$B = CA \quad (2.2.1)$$

这样的公式来表示，其中  $A$  称为作用物理量，代表施于材料的各种类型的作用； $B$  称为感生物理量或效果物理量，是在该材料中对  $A$  的响应而产生的物理量。 $A$  和  $B$  只描述对材料施加作用及由此所产生的响应，都是可测的量，但它们并不表示材料本身所具有的任何性质，故一般称为场量。 $C$  代表  $A$  和  $B$  之间的关系，不同材料虽然受到相同的  $A$  的作用，但会得到不同的效果物理量  $B$ ，这是由于不同材料具有不同的  $C$  值而造成的。因此， $C$  代表了材料本身所具有的特性，即材料的物理性质，称为物质量。通常， $C$  用物质系数来表示，如电极化率、介电系数等。

### 2.2.2 用张量描述宏观物理性质

#### 1. 场量和物质量都是张量

有些物质量（如质量、体积、密度等），其数值与测量的方向无关，这样的量没有方向性，称为各向同性量，也称为标量。由于材料密度不均匀，密度可能会在不同点有不同

的数值,即密度为点坐标 $(x_1, x_2, x_3)$ 的函数,但各点的数值仍然是与方向无关的。有些量(如电场强度 $\mathbf{E}$ 、电极化强度 $\mathbf{P}$ ),其值不仅有一定大小,而且还具有一定的方向性,这些物理量在笛卡儿坐标系中可用3个分量数值的大小来表示其方向性,这类量称为矢量。除了矢量外,还有些物理量,如作用于材料上的应力和由之感生的应变,它们既具有一定量值,又具有一定的方向性,在笛卡儿坐标系中,它们已不能只由3个分量而必须由9个分量的组合才能描述,每个分量具有两个下标,这样的物理量成为二阶张量,如应力可以写成

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

同样,晶体的电极化率 $\chi$ 也是一个二阶张量,由于晶体的各向异性,在某点的电极化强度 $\mathbf{P}$ 并不与该点的电场强度 $\mathbf{E}$ 有相同的方向,如图2-5所示。

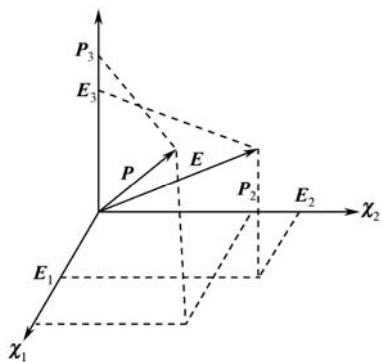


图2-5 晶体中的 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$

那么电场强度和电极化强度之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_0(\chi_{11}E_1 + \chi_{12}E_2 + \chi_{13}E_3) \\ P_2 &= \varepsilon_0(\chi_{21}E_1 + \chi_{22}E_2 + \chi_{23}E_3) \\ P_{31} &= \varepsilon_0(\chi_{31}E_1 + \chi_{32}E_2 + \chi_{33}E_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

若用矩阵表示,则可写成

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

因此有

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

通常，一个三维空间的张量是  $3^n$  个数的有序集合的总称， $n$  称为该张量的阶数。

## 2. 用张量描述晶体的物理性质

由式 (2.2.1) 可知，材料的物理性质用物质质量  $C$  表示，由上面讨论可知，无论是场量还是物质质量，都是张量，因此在一般情况下，材料的物理性质显然可用张量来描述。考虑到场量  $A$  和  $B$  可以是阶数不同的张量，所以用张量形式来表示式 (2.2.1) 时，可写成下式

$$B_{ijk\dots} = C_{ijk\dots lmn\dots} A_{lmn\dots} \quad (2.2.6)$$

式中， $A_{lmn\dots}$  是  $p$  阶作用张量， $B_{ijk\dots}$  是  $q$  阶感生张量，根据张量的运算法则， $C_{ijk\dots lmn\dots}$  为  $p+q$  阶物理性质张量。

从式 (2.2.6) 可以看出，我们必须使用张量来描述材料的物理性质，因为张量既能反映该性质的数量特征，也可以表示出其方向特征。晶体具有各向异性，与各向同性的材料相比，晶体物理性质的数量与方向特征力用张量明显表达出该特点。

### 2.2.3 晶体对称性对晶体宏观物理性质的影响

晶体的宏观对称性和晶体的宏观物理性质都是晶体的内部长程有序在宏观性质上的反映，因此，晶体的宏观对称性必对其物理性质产生影响。设沿晶体某一个方向测定其物理性质，使晶体做一次点对称操作，固定在晶体上的坐标系必然旋转、反映到新的坐标系，新旧坐标系之间由正交变换联系着。由于对晶体进行的是对称操作，测得的物理性质不应该改变，即对晶体进行点群操作不会使晶体宏观可测物理性质产生任何可以测量的变化。正是根据这种理解，并研究了大量实验现象之后，得到了晶体宏观物理性质和晶体对称性的两条基本原理。

#### 1. 居里原理

居里原理是指晶体在受到外场作用后，晶体的对称要素仅保留晶体原有对称要素中与外场的对称要素相一致的那一部分。这就意味着当外场的对称性高于晶体对称性时，晶体的对称性保持不变；而当外场的对称性低于晶体的对称性时，外场作用后晶体的对称性要降低。

#### 2. 诺埃曼 (Neumann) 原理

诺埃曼 (Neumann) 原理是指晶体的任一物理性质所拥有的对称要素，必须包含晶体所属点群的全部对称要素。

诺埃曼原理是指晶体物理性质的对称性必然高于或至少不低于晶体所属点群的对称性，但它并未断言晶体物理性质的对称要素一定与晶体所属晶类的对称要素相同。居里原理是指当外场的对称性高于晶体对称性时，晶体的对称性保持不变；而当外场的对称性低于晶体的对称性时，外场作用后晶体的对称性要降低。

从诺埃曼原理与居里原理出发，可以推导出晶体物理性质的对称性与晶体宏观对称性之间的3条规律：

(1) 凡是具有中心对称的晶体，都不可能具有用奇数张量描述的物理性质。

(2) 一切晶体都具有偶数阶张量描述的物理性质。

(3) 只有极性晶类才具有一阶张量描述的物理性质。所谓极性晶类是指晶体中的单向与极轴相一致的晶类，这里单向是指晶体中的特殊方向，即晶体中不能通过本身所具有的对称要素的作用而与其他方向重复的方向。

在晶体受到外场作用但这种作用对晶体结构和晶体对称性的影响可以忽略的情况下，诺埃曼原理是完全正确的。在一般情况下，外场的这种作用常常可以忽略，但对某些敏感的物理性质，外场的影响就比较明显，因此不能忽略。例如，在外电场或外应力场的作用下，立方晶体的光学性质将发生变化，由原来的光学各向同性变成类似于单轴晶或双轴晶性质。如果把诺埃曼原理看做外场作用前晶体对称性与晶体物理性质间的相互关系准则，那么居里原理则可以看做外场作用后确定晶体对称性的准则。外场作用后，晶体对称性与晶体物理性质间的关系仍然满足诺埃曼原理。

## 2.3 传感器与执行器的物质效应模型

晶体的压电性质反映了晶体宏观电学性质与力学性质之间的耦合，要想比较全面地了解晶体的压电性质，需将晶体作为一个热力学系统来研究。

### 2.3.1 6种能量间的物质效应模型

随着晶体物理宏观唯象理论研究的深入，特别是由于光学与声学量测试与控制及其传感器开发的需要，经过大量调查研究，作者导师孙宝元教授等最近在4种能量集纳物质效应模型的基础上又提出机、电、热、磁、声、光6种能量间物质效应新模型，如图2-6所示，这是一个三维立体模型。6种示强变量（广义力）分布在通过对角线相互正交的3个正方形的顶点上，与其相对应的示容变量（广义位移）则分布在两个正方形的交线上，从而形成12种物理量空间点阵，各参量之间的连线便构成6种主效应和126种交叉效应。

如果再考虑二次、三次感生效应，则各物理量之间的效应可达数百种以上。值得注意的是：该模型几乎包含了所有的现有模型， $ET\theta$  为 Heckmann 模型， $ETK$  为 Thurston 模型， $ET\theta H$  为 4 种能量间的物性效应模型。而且根据需要，可以任意组成新的三角形或多边形模型。

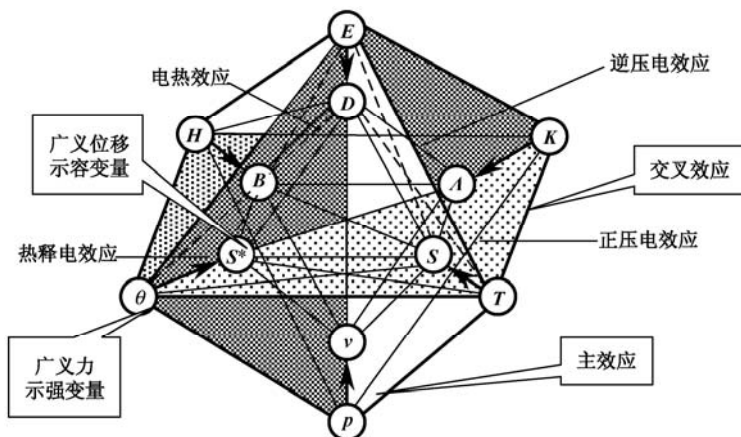


图 2-6 6 种能量间的物质效应模型

在图 2-6 中， $K$  为光能的示强变量（广义力）； $A$  为光能的示容变量（广义位移）； $p$  为声能的示强变量（有效声压）； $v$  为声能的示容变量（有效质点速度）； $T$  为弹性能的示强变量（应力）； $S$  为弹性能的示容变量（应变）； $E$  为电能的示强变量（电场强度）； $D$  为电能的示容变量（电位移）； $H$  为磁能的示强变量（磁场强度）； $B$  为磁能的示容变量（磁感应强度）； $\theta$  为热能的示强变量（温度）； $S^*$  为热能的示容变量（熵）。

### 1. 晶体 6 种能量关系式

如果从晶体热力学角度考虑，该模型全面地反映了能量（势函数）间的内在关系。吉布斯自由能可扩展为

$$G^* = U - \theta S^* - T_j S_j - E_k D_l - H_m B_n - K_o A_p - P_q V_r \quad (2.3.1)$$

式中， $K A$  是光能， $K$  是光能（主要是光子能量的集合）的示强变量（广义力）， $A$  是光能的示容变量（广义位移）（ $o, p = 1, 2, 3$ ）； $P V$  是声能， $P$  是有效声压的示强变量（广义力）， $V$  是有效质点速度的示容变量（广义位移）（ $q, r = 1, 2, 3$ ）。

当  $G^* = 0$  时，则物质内能为

$$U = \theta S^* + T_j S_j + E_k D_l + H_m B_n + K_o A_p + P_q V_r \quad (2.3.2)$$

当晶体受到外界某种扰动时，上式可用微分形式表示出来，即

$$dU = \theta dS^* + S^* d\theta + T_j dS_j + S_j dT_j + \cdots + V_r dP_q$$

$$dU = \sum_{w=1}^6 \pm \Psi d\Omega \pm \Omega d\Psi \quad (2.3.3)$$

式中,  $\Psi$  与  $\Omega$  是势函数的共轭参量, 当自变量  $\Omega$  或  $\Psi$  为广义位移时,  $\Psi$  或  $\Omega$  前的符号取“+”; 当  $\Omega$  或  $\Psi$  为广义力时, 则取“-”。

由上式可以看出, 外界对晶体产生任何扰动, 晶体内能和可做功的自由能都将发生变化。同时, 相关参量也将发生变化, 即所谓“牵一发而动全身”。这也可以从各共轭参量的麦克斯韦关系式得到进一步证明, 只不过当时的麦克斯韦关系式中尚未包括光与声两个势函数而已。

## 2. 晶体物性效应的通用表达式

如果从晶体的主效应与交叉效应考虑, 将同一能量系统之间的物性关系称为主效应, 如图 2-6 中粗箭头所示。构成主效应的两个参量称为共轭参量。一对共轭参量, 两者之积为势函数, 两者之比为物性参数。除主效应外, 其余统称为交叉效应。我们几乎可以把所有主效应和交叉效应分别用解析式表达出来, 但这样做太烦琐。经分析确认, 利用这个完备的新模型, 通过物性参量的本构关系的广义表达式可以将所有的物性效应全部表达出来。

仅以应用广泛的机电耦合效应(正逆压电效应)为例, 如图 2-6 中的梯形 ETSD。该效应可以表示为应力场  $T$ 、应变场  $S$ 、电场  $E$  及电位移场  $D$  的耦合关系。为与前面的热力学系统能量方程相区别, 将下列本构关系写为机电耦合方程的矩阵表达式, 实质上也是能量转换关系式。

$$D_j = S_{jk} E_k + d_{ji} T_i + e_{ij} S_j + \cdots \cdots (1 \text{ Item}) \quad (2.3.4)$$

$$S_j = r_{ji} T_i + d_{jk} E_k + e_{ji} D_l + \cdots \cdots (1 \text{ Item}) \quad (2.3.5)$$

$$E_k = \varepsilon'_{kl} D_l + d'_{kj} S_j + v_{ki} T_i + \cdots \cdots (1 \text{ Item}) \quad (2.3.6)$$

$$T_j = r'_{ij} S_j + d'_{il} D_l + v'_{ik} E_k + \cdots \cdots (1 \text{ Item}) \quad (2.3.7)$$

由式 (2.3.4) ~ 式 (2.3.7) 可知, 当等号右边第 2 项及其以后项自变量矩阵 ( $T, S, E, D, \cdots$ ) 分别为零时, 则各式分别表示主效应。其系数矩阵  $\varepsilon_{ji}$ 、 $\varepsilon_{ij}^*$ 、 $c_{lk}$ 、 $c_{kl}^*$  分别为介电系数、介电隔离系数、弹性刚度系数、弹性柔顺系数。当右边第 1 和第 3 项及以后各项的自变量矩阵为零或恒定时, 则式 (2.3.4) ~ 式 (2.3.7) 分别表示正压电效应、逆压电效应, 以及前两者的反向压电效应。

除机电耦合关系式外, 其他能量间的耦合关系式也可以如上式列写。

为了便于说明, 特做如下约定: 将图 2-6 所示的 6 种能量模型分为外层结点(广义力)和内层结点(广义位移), 本图只表示这两个层次, 即一次效应。如果想要描述等于或大

于二次效应, 则内层结点数也要相应增加。不同层面结点之间的连线(矢量)称为交叉效应, 同一层面(不管是外层还是内层)不同结点之间的连线称为平行效应。可见, 前者为广义力与广义位移参量之间的效应, 后者为各广义力(或广义位移)参量之间的效应。

麦克斯韦关系式反映到模型上, 则呈现如下的规律:

任何两种能量之间的耦合(共有 15 种耦合), 其两个交叉效应的系数相等, 两个平行效应的系数互为倒数且符号相反。即麦克斯韦关系式反映在交叉效应之间的关系有

$$\frac{\partial D}{\partial T} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E}, \quad \frac{\partial D}{\partial \theta} = \frac{\partial S^*}{\partial E}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial S^*}{\partial T} \quad (2.3.8)$$

反映在平行效应之间的关系有

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial D} = \frac{\partial E}{\partial T}, \quad \frac{\partial D}{\partial S^*} = \frac{\partial \theta}{\partial E}, \quad \frac{\partial E}{\partial S^*} = \frac{\partial \theta}{\partial T} \quad (2.3.9)$$

6 种能量间的物质效应模型中每一物性参量(包括所有广义力和广义位移)与其他参量之间的本构关系, 其通用表达式(唯象方程)在一级近似情况下为

$$[X_i]_j = \sum_{k=1}^{3 \times 5} \pm [Y_{il} Z_l]_k \quad (2.3.10)$$

式中  $X_i$ ——被示参量的  $i$  维矢量(单列矩阵)。

若  $X$  为标量, 如  $\theta$ 、 $S$ 、 $*$  等, 则  $i=1$ 。

若  $X$  为一阶张量, 如  $E$ 、 $D$ 、 $H$ 、 $B$ 、 $K$ 、 $P$  等, 则  $i=1, 2, 3$ 。

若  $X$  为二阶张量, 并可化为 6 维矢量, 如  $T$ 、 $S$  等, 则  $i=1, 2, \dots, 6$ 。

$j$ ——所示参量的个序数, 6 个广义力和 6 个广义位移, 故  $i=1, 2, \dots, 12$ 。

$Y_{il}$ ——两种参量之间的耦合系数矩阵。

$Z_l$ ——第  $k$  个与  $X_i$  耦合的自变量参量。

若  $Z$  为标量,  $l=1$ 。

若  $Z$  为一阶张量,  $l=1, 2, 3$ 。

若  $Z$  为二阶张量, 并可转化为 6 维矢量, 则  $l=1, 2, \dots, 6$ 。

当从理论上不只考虑两种能量和 4 个参量之间的耦合, 而是同时考虑多种能量(最多可达 6 种)和多个参量(最多可达 12 个)间的相互耦合时, 则式(2.3.4)~式(2.3.7)的通用表达式可写为

$$\{[X_i]_j\}_n = \left\{ \sum_1^{12} \pm Y_{il} \right\} \cdot \{Z_l\}_m \quad (2.3.11)$$

表 2-4 所示为目前已发现并在科技中应用的 6 种能量物质效应一览表, 表中空白处为正在开发和尚未开发的效应。由该表进一步说明, 光与声在众多的物质效应中具有重要的地位。只有 6 种能量间相互作用, 才能全面地反映物质效应变化的规律。



表 2-4 6 种能量物质效应一览表

	机	电	磁	光	声	热
机		机电效应： 1. 正压电效应 2. 压阻效应 3. 威德曼	机磁效应：压磁效应	机光效应：力致双折射现象等		机热效应：与热膨胀互为逆效应
电	电(磁)机械效应： 1. 逆压电效应 2. 电动效应		电磁效应： 1. 电磁效应 2. 电磁感应	电光效应： 1. 斯塔克效应 2. 泡克尔斯 3. 电光克尔 4. 液晶电光 5. 场致发光 6. 弗郎兹-凯尔迪什 7. 电控双折射效应	电声效应： 1. 电动式 2. 电致伸缩	电热效应： 1. 电热效应 (热释电的逆效应) 2. 热电子效应 3. 热电阻温度效应
磁	磁机效应： 磁致伸缩效应等	磁电效应： 1. 霍尔效应 2. 磁敏电阻 3. 苏里效应 4. 磁感生电效应 5. 趋肤效应		磁光效应： 1. 塞曼效应(正常、反常) 2. 法拉第磁致旋光效应 3. 磁光克尔效应 4. 磁致双折射效应	磁声效应：爱廷豪森效应	磁热效应： 去磁致冷效应 (绝热)
光	光机效应： 光弹效应(在外力作用下产生各向异性的光学性质)	光电效应： 1. 内外光电效应 2. 光生伏特效应 (光磁电效应) 3. 俄歇效应 4. 光电流效应 5. 康普顿效应与逆效应 6. 光致电压效应 7. 光铁电效应	光磁效应： 光磁执行器		光声效应：调制光照射介质产生声信号 光声电话机，光声光谱仪	光热效应： 1. 光热偏转效应 2. 激光制冷和“光镊”效应 3. 光-热、热-电效应

续表

	机	电	磁	光	声	热
声	声机效应： 声多谱勒效应	声电效应： 1. 声电效应及超声放大：超声波在半导体中引起正负电荷 2. 声子（超声声子和热声声子）曳引效应 3. 超声波致电压效应		声光效应： 声或超声引起光传播特性的变化，用于声光调制		声热效应： 噪声温度计、 超声温度计
热	热机效应： 热膨胀效应（与压热效应互逆）	热电效应： 1. 塞贝克效应 2. 珀尔贴效应 3. 汤姆逊效应 4. 热释电效应（与电热为互逆） 5. 热电子效应 6. 肖脱基效应	热磁效应： 1. 爱廷豪森效应 2. 能斯特效应（与霍尔效应相似） 3. 热声子曳引效应	热光（红外）效应： 热辐射效应	热声效应： 热噪声	

3. 结论

新模型是在以往的 3 种能量和 4 种能量间物质效应模型的基础上建立起来的,它全面、形象地描述了力、电、光、声、热、磁 6 种能量间的物性本构关系。根据本模型能较容易地建立起物性本构方程和各种参量间的效应方程。同时，从热力学的角度也能全面地反映晶体物性参量的宏观规律。

该模型为空间层次化结构，最外层各结点为示强变量（广义力），内层结点为示容变量（广义位移）。可分别构成主效应、交叉效应、平行效应等一次效应，若向内层扩展也可以描述二次、三次……效应。

以机电耦合（压电）效应为例，给出了力与电两种能量间晶体材料本构关系表达式，并在同一公式中反映了主效应、交叉效应、平行效应，以及其间的关系。

根据该模型不但能描述已知效应，而且可描述和预知尚未开发的效应。如光与磁、声与磁、声与热等许多效应有待进一步开发。

### 2.3.2 3种能量间的物质效应 G. Heckmann 模型

图 2-7 所示的 Heckmann 模型是在 1925 年 G.Heckmann 提出的 3 种能量物质效应之间的各种关系,它描述了 3 种能量(机械能、电能与热能)的物理参量间的耦合关系所反映出的各种物理效应。

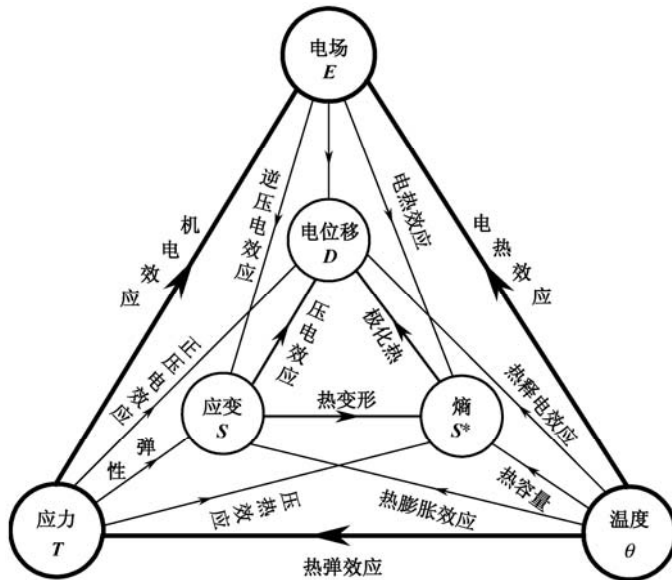


图 2-7 3 种能量间物质效应 Heckmann 模型

图 2-7 中三角形外层各顶点(应力  $T$ 、电场强度  $E$ 、温度  $\theta$ )为示强变量,即自变量、广义力等;与之相对应的内层各顶点(应变  $S$ 、电位移  $D$ 、熵  $S^*$ )为示容变量,即因变量,也称广延变量、响应变量、式量变量、广义位移等。内外三角形对应的顶点连线( $T$ - $S$ 、 $E$ - $D$ 、 $\theta$ - $S^*$ )为主效应,其余各顶点之间的连线称为交叉效应,各种主效应与交叉效应的名称均标注在图上。

压电晶体根据其所处的热学条件,可以分为等温状态(过程进行得极为缓慢)及绝热过程(过程进行得极为迅速)。在多数实际应用中,压电晶体的机械能与电能之间的转换是很快的,以致晶体与周围环境来不及热交换,因而系统近似处于绝热状态。因此在考虑晶体的压电效应时,一般并不关心晶体所处的热学条件,主要考虑电学量与力学量之间的耦合。在这种情况下,压电晶体所构成的热力学系统,其状态可用系统力学与电学性质的两对共轭状态参量:应力  $T_\lambda$  与应变  $S_\lambda$  ( $\lambda=1,2,\dots,6$ )和电场强度  $E_i$  与电位移矢量

$D_i$  ( $i=1,2,3$ ) 来描述, 其中应力与应变为二阶对称张量, 电场强度与电位移矢量为二阶张量。对于二阶对称张量应力与应变, 采用 Voigt 提出的下标缩并法来简化处理。选取广义位移  $(S_\lambda, D_i)$  为自变量, 考虑单位体积的晶体, 系统的内能变化可表示为

$$dU = T_\lambda dS_\lambda + E_i dD_i \quad (2.3.12)$$

式 (2.3.12) 为联系两个自变量与响应变量之间的关系式, 称为状态方程。在数学上, 式 (2.3.12) 表示  $dU$  是函数  $U$  关于自变量的全微分。根据函数  $U(S_\lambda, D_i)$  的全微分性质, 并与式 (2.3.1) 相比较, 可以得到自变量的共轭量如下

$$T_\lambda = \left( \frac{\partial U}{\partial S_\lambda} \right)_D \quad (2.3.13a)$$

$$E_i = \left( \frac{\partial U}{\partial D_i} \right)_S \quad (2.3.13b)$$

系统的吉布斯自由能为

$$G(T, E) = U - T_\lambda S_\lambda - E_i D_i \quad (2.3.14)$$

利用式 (2.3.12) 和式 (2.3.14) 得出吉布斯自由能的微分形式为

$$dG = -S_\lambda dT_\lambda - D_i dE_i \quad (2.3.15)$$

由式 (2.3.15) 可知

$$S_\lambda = - \left( \frac{\partial G}{\partial T_\lambda} \right)_E \quad (2.3.16a)$$

$$D_i = - \left( \frac{\partial G}{\partial E_i} \right)_T \quad (2.3.16b)$$

当外界约束参量相对于初态值  $(T, E)$  发生一个无穷小的扰动而变为  $(T + dT, E + dE)$  时, 这时系统相对于初态  $\Phi = (T, E; S, D)$  将发生一个无穷小的偏离, 从而达到新的平衡态  $\Phi^* = (T + dT, E + dE; S + dS, D + dD)$ , 因此可以严格地写出式 (2.3.16) 的线性微分形式, 即线性微分状态方程。

$$dS_\lambda = \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial T_u} \right)_E dT_u + \left( \frac{\partial S_\lambda}{\partial E_j} \right)_T dE_j \quad (2.3.17a)$$

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial T_u} \right)_E dT_u + \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_j} \right)_T dE_j \quad (2.3.17b)$$

在式(2.3.17)中,将联系约束变量与所对应的响应参量之间的系数称为物性参数(表征晶体物理性质的参数),它们提供了状态参量之间线性耦合的量度。

由式(2.3.16)和式(2.3.17)不难得到,物性参数是所对应约束下的势函数对约束变量的二阶微商。利用二阶微商可以交换求导顺序的性质,可以得出系数之间存在的麦克斯韦关系

$$\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial E_i}\right)_T = \left(\frac{\partial D_i}{\partial T_\lambda}\right)_E = -\left(\frac{\partial G}{\partial T_\lambda \partial E_i}\right) \quad (2.3.18)$$

以及系数下标的交换对称性关系

$$\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial E_i}\right)_T = \left(\frac{\partial D_i}{\partial T_\lambda}\right)_E = -\left(\frac{\partial G}{\partial T_\lambda \partial E_i}\right) \quad (2.3.19)$$

引入物性参数:

$$\text{弹性顺度系数:} \quad s_{\lambda u} = \partial S_\lambda / \partial T_u \quad (2.3.20a)$$

$$\text{介电系数:} \quad \varepsilon_{ij} = \partial D_i / \partial E_j \quad (2.3.20b)$$

$$\text{压电应变系数:} \quad d_{i\lambda} = \partial S_\lambda / \partial E_i = \partial D_i / \partial T_\lambda \quad (2.3.20c)$$

利用物性参数定义式(2.3.20a)~式(2.3.20c),线性状态方程式(2.3.17)可以写成

$$dS_\lambda = s_{\lambda u}^E d\sigma_u + d_{\lambda j} dE_j \quad (2.3.21a)$$

$$dD_i = d_{iu} d\sigma_u + \varepsilon_{ij}^\sigma dE_j \quad (2.3.21b)$$

上面两个方程右边主对角线各项描述主效应,非主对角线各项描述耦合效应,且存在两种耦合程度相同的耦合效应,它们分别处于关于主对角线对称的位置。

由于任何实际过程都是有限的,而不是无穷小的变化过程,于是近似描述成为必要。对式(2.3.21)积分得到实际应用中经常采用的积分形式的线性状态方程。

$$S_\lambda = s_{\lambda u}^E T_u + d_{\lambda j} E_j \quad (2.3.22a)$$

$$D_i = d_{iu} T_u + \varepsilon_{ij}^T E_j \quad (2.3.22b)$$

在推导上式的过程中,实际上假定了各物性参数均为常数且取初态  $\Phi^0 = (T^0, S^0, E^0, D^0)$  下的值,并且初态是这样一种特殊的状态,  $T^0 = S^0 = E^0 = D^0 = 0$ 。物性参数均为常数这一假设只有当约束变量相对于平衡态不太大时才近似成立。

上面讨论了描述晶体压电效应的4种约束类型中的一种——以广义力(应力  $T_u$ 、电场强度  $E_i$ )作为独立变量表示的压电方程。由于描述力学行为和电学行为的独立变量可以任意选择,因此根据独立变量的选择不同,可得到不同形式的压电方程。

机械自由状态与电学自由状态（电学短路）：

$$\mathbf{S}_\lambda = s_{\lambda u}^E \mathbf{T}_u + d_{\lambda j} \mathbf{E}_j \quad (2.3.23a)$$

$$\mathbf{D}_i = d_{iu} \mathbf{T}_u + \varepsilon_{ij}^T \mathbf{E}_j \quad (2.3.23b)$$

机械自由状态与电学受夹状态（电学开路）：

$$\mathbf{S}_\lambda = s_{\lambda u}^E \mathbf{T}_u + g_{\lambda j} \mathbf{D}_j \quad (2.3.24a)$$

$$\mathbf{E}_i = -g_{iu} \mathbf{T}_u + \beta_{ij}^T \mathbf{D}_j \quad (2.3.24b)$$

机械夹持状态与电学自由状态（电学短路）：

$$\mathbf{T}_\lambda = c_{\lambda u}^E \mathbf{S}_u - e_{\lambda j} \mathbf{E}_j \quad (2.3.25a)$$

$$\mathbf{E}_i = e_{iu} \mathbf{S}_u + \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j \quad (2.3.25b)$$

机械夹持状态与电学受夹由状态：

$$\mathbf{T}_\lambda = c_{\lambda u}^D \mathbf{S}_u - h_{\lambda j} \mathbf{D}_j \quad (2.3.26a)$$

$$\mathbf{E}_i = -h_{iu} \mathbf{S}_u + \beta_{ij} \mathbf{E}_j \quad (2.3.26b)$$

以上 4 种压电方程究竟选用哪一组来描述晶体的压电效应，要由所研究的具体问题的性质或实验测量条件而定。一般情况下为了方便，在应用中常选广义力  $(\mathbf{T}, \mathbf{E})$  为约束变量来描述晶体的压电效应。

上面的 4 种压电方程从不同角度反映了压电晶体的机电耦合所遵从的规律，它们之间是相互关联的，从任何一组方程出发都可以推导出其余方程，也就是说，由任何一种约束类型所得到的 4 个不同物性参数出发，可以推导出其他约束下的物性参数。这些系数之间有如下联系。

主效应物性参数之间的关系：

$$s_{\lambda u}^E c_{vu}^E = \delta_{\lambda v}, \quad s_{\lambda u}^D c_{vu}^D = \delta_{\lambda v} \quad (2.3.27a)$$

$$\varepsilon_{ij}^S \beta_{kj}^S = \delta_{ik}, \quad \varepsilon_{ij}^T \beta_{kj}^T = \delta_{ik} \quad (2.3.27b)$$

耦合效应物性参数之间的关系：

$$d_{iu} = e_{i\lambda} s_{\lambda u}^E = \varepsilon_{ij}^T g_{ju} \quad (2.3.28a)$$

$$e_{iu} = d_{i\lambda} c_{\lambda u}^E = \varepsilon_{ij}^S h_{ju} \quad (2.3.28b)$$

$$g_{iu} = h_{i\lambda} s_{\lambda u}^D = \beta_{ij}^T d_{ju} \quad (2.3.28c)$$

$$h_{iu} = g_{i\lambda} c_{\lambda u}^D = \beta_{ij}^S e_{ju} \quad (2.3.28d)$$

同一物性参数之间在不同约束条件下的相互关系:

$$c_{\lambda u}^E - c_{\lambda u}^D = e_{k\lambda} h_{ku} \quad (2.3.29a)$$

$$s_{\lambda u}^E - s_{\lambda u}^D = -d_{k\lambda} g_{ku} \quad (2.3.29b)$$

$$\varepsilon_{ij}^\sigma - \varepsilon_{ij}^S = d_{ip} e_{jp} \quad (2.3.29c)$$

$$\beta_{ij}^T - \beta_{ij}^S = -g_{iq} h_{jq} \quad (2.3.29d)$$

在上面论述中，并没有涉及材料的特殊性。事实上考虑到麦克斯韦关系式（2.3.18）和式（2.3.19）与晶体对称性（Neumann 原理）对这些物性参数（张量）所施加的限制，使得实际压电方程中物性参数的独立分量非常有限，从而可简化计算。

## 第 3 章

# 压电效应力学基础

压电效应即机电耦合效应，本章首先介绍压电效应中的力学问题。在外力作用下，任何固体都要产生形变，如果外力撤除后，固体形变消除并恢复原状，这样的性质称为弹性性质。由于晶体结构的各向异性，各方向上粒子在变形时偏移程度不同，从而使宏观的形变各向异性，同样由于晶体内部粒子沿各方向偏移程度的差异，从而使粒子恢复到原来平衡位置所产生的内应力也随方向不同，显然晶体的弹性性质也是各向异性的，需要用各向异性弹性理论进行分析。

## 3.1 各向异性弹性力学基本方程

各向异性弹性体内同一点各微分面上的应力状况可用应力张量  $\sigma_{ij}$  表示，弹性体内同一点的各微分面上的应变状况用应变张量  $\epsilon_{ij}$  表示。对于小变形来说，物体任一点的应力（9 个分量）、应变（9 个分量）和位移（3 个分量）可以用变形前质点的坐标描述，它们必须满足平衡微分方程、几何关系和变形协调方程。

### 3.1.1 应力状态理论

在笛卡儿坐标系中，用 6 个平行于坐标面的截面在  $P$  点的领域内取出一个正六面体微元，如图 3-1 所示。



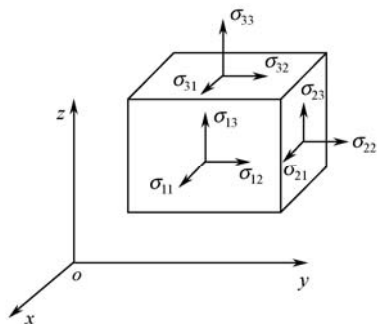


图 3-1 笛卡儿坐标系中的应力张量

其中，外法线与坐标轴  $x_i (i=1,2,3)$  同向的 3 个面元称为正面，记为  $da_i$ ，它们的单位法向矢量为  $\mathbf{l}_i = \mathbf{e}_i$ ， $\mathbf{e}_i$  是笛卡儿坐标系的基矢量；另 3 个外法线与坐标轴反向的面元称为负面，它们的单位法向矢量为  $-\mathbf{e}_i$ 。把作用在正面  $da_i$  的应力矢量  $\boldsymbol{\sigma}_{(i)} (i=1,2,3)$  沿坐标轴正向分解，共得到 9 个应力分量，它们作为一个整体，称为应力张量。

$$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

### 1. 平衡微分方程

如果物体在外力（包括面力和体力）作用下处于平衡状态，则将其分割成若干任意形状的单元体以后，每个单元体仍然是平衡的；反之，分割后每个单元体的平衡也保证了整个物体的平衡。如果我们考虑物体内部任意一个微分平行六面体的平衡，即导出了平衡微分方程。设弹性体受到外力作用，其中单位体积的体力为  $X, Y, Z$ ，则有平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2a)$$

上式还可以表示为

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \quad (3.1.2b)$$

## 2. 静力边界条件

平衡微分方程表示应力在物体内部的平衡,而在物体表面,应力必须与表面上的外力平衡,设物体外法线的方向余弦为  $l, m, n$ , 单位面积上面力的 3 个分量为  $X_n, Y_n, Z_n$ , 则表面处的边界条件即著名的柯西斜面应力公式为

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3a)$$

上式还可以表示为

$$X_{ni} = \sigma_{ji} l_j \quad (3.1.3b)$$

## 3. 应力张量的简化下标矩阵表示

由于应力张量  $\sigma$  具有对称性,因此它只有 6 个独立分量,为了反映这一特征并便于以后使用,常将  $\sigma_{ij}$  的双下标简化为单下标,本书统一约定此种简化下标方式为

$$\begin{array}{cccccc} 11 & 22 & 33 & 23,32 & 31,13 & 12,21 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad (3.1.4)$$

从而可以得出

$$\sigma_{ij} \rightarrow T_n(i, j = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (3.1.5)$$

平衡微分方程表示物体内部的平衡,而静力边界条件表示物体边界部分的平衡。如果已知应力分量满足平衡微分方程和静力边界条件,则物体是平衡的;反之,如果物体是平衡的,则应力分量必须满足平衡微分方程和静力边界条件。但需指出,这里的平衡仅仅是静力学上可能的平衡,未必是物体实际存在的平衡。要使物体真正平衡,还要考虑物体变形的连续条件。要确定物体在已知载荷作用下的应力状态,必须求解平衡微分方程式 (3.1.2),而且必须能满足边界条件式 (3.1.3)。显然,一点的应力状态需要 6 个独立的未知数,而平衡方程只能给定 3 个方程,这是一个超静定问题,为了求得解答,还必须考虑物体的形变。

### 3.1.2 应变状态理论

#### 1. 几何方程

物体在小变形情况下,体内各点的相对位置发生变化。认为弹性体各点的位移  $u_i$  的各分量是它们位置坐标  $x_i$  的线性函数,则其应变状态可以由质点位移  $u, v, w$  表达为

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.6)$$

显然,  $S_{ij} = S_{ji}$ , 应变张量也是对称张量, 其中

$$S_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, S_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.1.7)$$

为正应变分量, 表示  $x_1, x_2, x_3$  方向上的相对伸长。

$$\begin{cases} S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

为切应变分量。图3-2所示为  $S_{23}$  的示意图, 给出了一个二维图形  $ABCD$  在切应力  $\sigma_{23}$  和  $\sigma_{32}$  作用下的纯剪切变形。

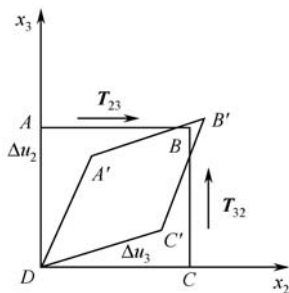


图 3-2 剪切应变分量示意图

当形变量很小时, 应变分量

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\angle ADA' + \angle CDC') \quad (3.1.9)$$

转动图形  $A'B'C'D$ , 令  $C'$  返回  $C$ , 则按照工程剪切应变  $\gamma$  的定义, 有

$$\gamma_{yz} = 2S_{23} = 2S_{32} = (\angle ADA' + \angle CDC') \quad (3.1.10)$$

即工程剪切应变为张量剪切应变的 2 倍, 正是由于这个区别, 应变张量分量在下标简化时取

$$S_1 = S_{11}, S_2 = S_{22}, S_3 = S_{33} \quad (3.1.11a)$$

$$S_4 = 2S_{23} = 2S_{32}, \quad S_5 = 2S_{13} = 2S_{31}, \quad S_6 = 2S_{12} = 2S_{21} \quad (3.1.11b)$$

同理, 可以求出其他工程剪切应变为

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

该线性微分方程组称为应变位移公式或几何方程, 其中  $S_{ij}$  表示应变张量。由几何方程通过位移分量求导得到应变分量, 但是给定应变反求位移就难得多, 并不总是可行。只有当应变满足应变协调方程时方可行。

## 2. 应变协调方程

对于单值连续的位移场, 位移分量对坐标的偏导数应与求导顺序无关, 由此可以推导出应变分量的协调条件。

$$S_{ij,kl} + S_{kl,ij} - S_{ik,jl} - S_{jl,ik} = 0 \quad (3.1.13)$$

这是存在单值连续位移场的充分必要条件。将式 (3.1.13) 在笛卡儿坐标系中展开, 得到常用形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 S_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 S_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 S_x}{\partial y \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

### 3.1.3 本构关系

从静力学和几何学的角度导出连续介质所共同满足的平衡方程、几何方程和协调方程, 这些方程共有 15 个未知数, 除去协调方程共有 9 个方程。显然, 方程中出现的未知

量数多于可利用的方程数, 仅用这些方程还不足以解决变形固体的平衡问题, 因为在推导这些方程时, 并没有考虑应力与应变的内在联系, 而实际上它们是相辅相成的, 它们之间的关系称为本构关系或本构方程。

广义胡克定律反映了各向异性弹性体中应力与应变的线性关系, 构成各向异性弹性力学的本构方程。它取代了各向同性的胡克定律, 这是与各向同性弹性力学基本方程的不同。

在小变形情况下, 对于各向异性弹性体, 任何一个应力分量都可能引起任何其他一个应变分量的变化, 在任意正交坐标系中, 广义胡克定律可写成下列形式

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.1.15)$$

式中,  $s_{ij}$  是弹性柔度系数。

对式 (3.1.15) 求逆, 可得到另一种形式的广义胡克定律。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.1.16)$$

式 (3.1.15) 和式 (3.1.16) 中的弹性顺度矩阵  $\mathbf{s}$  和弹性刚度矩阵  $\mathbf{c}$  有下列关系

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1} \quad (3.1.17)$$

根据热力学关系可以证明,  $\mathbf{s}$  与  $\mathbf{c}$  均为对称矩阵。假定在应力作用下, 应变有增量  $d\mathbf{S}_i$ , 则系统单位体积的能量增量  $dW$  为

$$dW = T_i dS_i = c_{ij} s_j dS_i \quad (3.1.18)$$

于是:

$$\frac{\partial W}{\partial S_i} = T_i = c_{ij} S_j$$

再对  $S_j$  微商:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial S_i \partial S_j} = c_{ij}$$

类似地:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial S_j \partial S_i} = c_{ji}$$

由于微商顺序不应该影响能量变化结果, 故有

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (3.1.19)$$

同理

$$s_{ij} = s_{ji} \quad (3.1.20)$$

### 3.1.4 静力学唯一性定理 (Kirchhoff-Neumann 唯一性定理)

在已知外力作用下, 如果弹性体处于平衡状态, 则在给定边界条件下, 弹性体各点的应力分量与应变分量是唯一的。

线弹性静力学边值问题提法是 (自变量为空间坐标  $x_i$ ):

平衡微分方程:

$$\sigma_{ij,j} + X_j = 0$$

几何方程:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (3.1.21)$$

边界条件:

$$\Gamma_\sigma : \sigma_{ij} m_j = X_n^* \quad (\text{指定外应力})$$

$$\Gamma_u : u_i = u_i^* \quad (\text{指定位移})$$

假设在一体力 ( $X, Y, Z$ ) 作用下并在同一边界条件有两种不同解答, 即 ( $\sigma'_{ij}, S'_{ij}, u'_{ij}$ ) 与 ( $\sigma''_{ij}, S''_{ij}, u''_{ij}$ ), 令两组解之差为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} \\ S_{ij} &= S'_{ij} - S''_{ij} \\ u_{ij} &= u'_{ij} - u''_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.22)$$

满足下列要求:

平衡微分方程:

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

几何方程:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (3.1.23)$$

边界条件:

$$\Gamma_\sigma : \sigma_{ij} m_j = 0$$

$$\Gamma_u : u_i = 0$$

这就构成了线弹性静力学边值问题的一个特殊情形,即体积力为零,在边界  $S_\sigma$  上指定的外力和在边界  $S_u$  上指定的位移为零。

在小位移理论中,微小的实位移满足虚位移的条件,虚功原理表达式为

$$\iiint_V \sigma_{ij}^S S_{ij}^k dV = \iiint_V f_i u_i^k dV + \iint_{S_\sigma} F_i u_i^k da + \iint_{S_u} F_i u_i^k da \quad (3.1.24)$$

式中,  $\sigma_{ij}^S$  是静力可能的应力,  $\epsilon_{ij}^k$  是几何可能的应变,  $u_i^k$  是几何可能的位移。

应用于边值问题的特殊情形形式 (3.1.23) 得

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_V f_i u_i dV + \iint X_{n_i} u_i da + \iint X_{n_i} u_i da \\ &= \iiint_V \sigma_{ij} S_{ij} dV = 2 \iiint_V \Pi_1(S_{ij}) dV \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

因线弹性应变能密度函数  $\Pi_1(S_{ij})$  是应变分量的正定的二次齐次函数,则可得

$$S_{ij} = S'_{ij} - S''_{ij} = 0 \quad \text{即} \quad S'_{ij} - S''_{ij} \quad (3.1.26)$$

再根据线弹性应力应变关系,得

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} = 0 \quad \text{即} \quad \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} \quad (3.1.27)$$

这就是说,线弹性静力学问题的一个特殊情形表达式 (3.1.23) 有唯一解,即唯一地得到零应力场和零应变场,由此也就证明了线弹性静力学边值问题的一般情形的表达式 (3.1.21) 有唯一解,即得到了唯一的应力场与应变场。

## 3.2 各向异性弹性力学平面问题基本方程

经典弹性力学中的平面问题是对各向同性体在特殊的几何形状(棱柱形物体)和受载形式(沿轴向不变)的情况下,把一个实际的空间问题简化成理想的平面问题。然而对于具有各向异性的弹性体,一般在满足上述各向同性体的特殊几何与受载形式条件下还不能简化为平面问题的充分条件,一般来说在物性方面它还需满足至少存在一个弹性对称面且与载荷作用平面相一致的条件,才能近似地处理成平面问题。

### 3.2.1 平面应变问题

研究一各向异性弹性体,假设它满足各向异性平面问题的基本条件。若取坐标平面  $oxy$  为弹性对称面,则  $z$  轴即为弹性主轴且与母线方向一致,如图 3-3 所示。

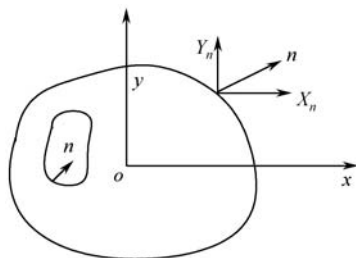


图 3-3 各向异性平面问题受力分析图

设柱体侧表面承受沿母线方向不变的表面力分量  $X_n, Y_n$  和体力分量  $X, Y$  且为有势力, 即

$$X = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, Y = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (3.2.1)$$

假设在上述载荷作用下, 所有应力与位移都沿  $z$  轴不变, 而仅为  $x, y$  的函数。由于任一横截面都是弹性对称面, 而不产生  $z$  方向的位移, 即  $w=0$ 。它只存在与横截面平行的位移  $u, v$ , 因此为一平面应变问题, 这时位移场为

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0 \quad (3.2.2)$$

应变场为

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, S_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ S_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

根据广义胡克定律式 (3.1.15), 并考虑到一个弹性对称面和式 (3.2.3), 可以求得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{1}{s_{33}}(s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{36}\tau_{xy}) \\ \tau_{yz} &= \tau_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

将式 (3.2.4) 代入广义胡克定律式 (3.1.15), 则得平面应变问题的本构关系

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \text{对称} & & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

式中引入折减顺度系数

$$\beta_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}} \quad (3.2.6)$$



平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - \bar{U}) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - \bar{U}) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

对于平面问题，弹性体的应变分量还必须满足下面的应变协调方程

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.2.8)$$

引入平面应力函数  $F(x, y)$ ，使得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \bar{U}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{U} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

则平衡微分方程 (3.2.7) 将恒满足，再将式 (3.2.9) 代入式 (3.2.8)，则有

$$L_4 F = -(\beta_{12} + \beta_{22}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + (\beta_{16} + \beta_{26}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y} - (\beta_{12} + \beta_{11}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \quad (3.2.10)$$

式中引入微分算子

$$L_4 \equiv \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(\beta_{12} + \beta_{16}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (3.2.11)$$

为了确定具体弹性问题的解，还需满足给定的表面边界条件。若柱体侧表面  $\Gamma$  上给定外力

$$T_n = X_n i + Y_n j \quad (3.2.12)$$

边界条件可写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n \end{aligned} \right\} \quad (3.2.13)$$

假设柱体横截面边界曲线表示为

$$x = x(s), y = y(s) \quad (3.2.14)$$

这里参变量  $s$  是边界周线的弧长, 如图 3-4 所示, 在周界上有关系式

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \pm \frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) &= \mp \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.15)$$

式中, 上面的符号表示外周界线, 下面的符号表示内周界线。

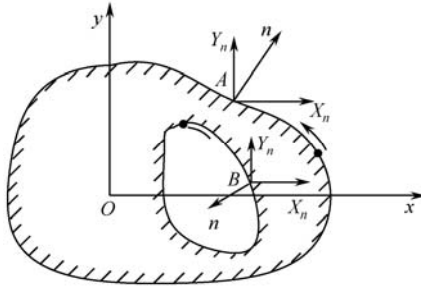


图 3-4 横截面边界曲线图

将式 (3.2.9) 和式 (3.2.15) 代入式 (3.2.13), 可得到用应力函数表达的边界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \int_0^s \left( \mp Y_n - \bar{U} \frac{dx}{ds} \right) ds + c_1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \int_0^s \left( \pm X_n - \bar{U} \frac{dy}{ds} \right) ds + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

常数  $c_1$ 、 $c_2$  可由任一周线确定。对于有限的单连通域, 则可取为零。式中的上、下符号分别与外周界、内周界相对应。

### 3.2.2 平面应力问题

考虑一等厚均质的各向异性薄板, 每一点上材料都具有一个与板中面平行的弹性对称性, 并取坐标平面  $Oxy$  位于板的中面上, 如图 3-5 所示。假定侧边的表面力与体力作用都平行和对称于中面, 并且沿厚度的分布是缓变的, 而在上、下表面上无外力作用。

由于板很薄, 所以可用应力和位移沿厚度的平均值来描述平板的变形状态, 取

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (3.2.17)$$

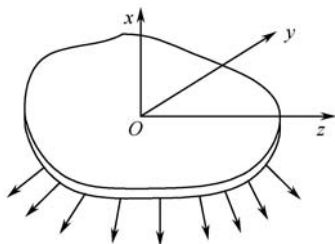


图 3-5 各向异性平面应力分析图

引入应力函数  $F$ ，使之与平均应力  $\bar{\sigma}_x$ 、 $\bar{\sigma}_y$ 、 $\bar{\tau}_{xy}$  具有如下关系

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \bar{U}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{U} \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.18)$$

此时微分方程式 (3.1.2) 恒满足。再由广义胡克定律式 (3.1.15)，考虑到式 (3.2.17)，可写出广义平面应力问题的物理关系

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{26} \\ \text{对称} & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.19)$$

将式 (3.2.18) 和式 (3.2.19) 代入应变协调方程式，则可得广义平面应力的基本微分方程式

$$\begin{aligned} & s_{22} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial y^4} \\ &= -(s_{12} + s_{22}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = (s_{16} + s_{26}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y} - (s_{11} + s_{12}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

### 3.3 各向异性弹性体的空间扭转问题

对于具有一般各向异性或其弹性对称平面与横截面成斜交的弹性体，在弹性体的端面上有扭矩  $M_t$  作用，将导致扭转应力函数  $\phi(x, y)$  变得相对复杂。此时尽管应力与应变分量只是  $x, y$  的函数，但是应力与位移状态均是空间的，且面内与轴向的位移和应力是相互耦合而同时存在的，从而形成一类特殊的各向异性弹性体的空间扭转问题。

### 3.3.1 各向异性弹性体空间扭转问题基本方程

考虑一直线型各向异性均质的弹性体，它有一弹性对称面但与横截面斜交。选坐标轴  $z$  轴与弹性体的母线平行且通过其横截面的形心； $Oxy$  平面位于任一点的横截面上，并令  $x, y$  轴与截面的主惯性轴一致，如图 3-6 所示。

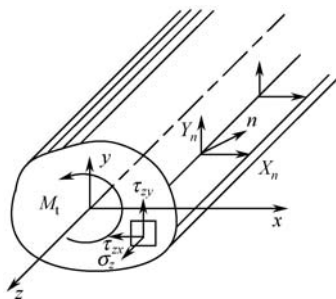


图 3-6 扭矩作用下各向异性弹性体受力图

假定弹性体的侧表面分布载荷为  $X_n(x, y)$  和  $Y_n(x, y)$ ，体积力为  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$ ，且为有势力，作用于端面上的扭矩为  $M_t$ 。首先根据应力与应变沿  $z$  轴不变的性质，引入符号

$$S_{z0}(x, y) = S_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.3.1)$$

代入广义胡克定律式 (3.1.15) 第 3 式可解得

$$\sigma_z = \frac{S_{z0}}{s_{33}} - \frac{1}{s_{33}}(s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) \quad (3.3.2)$$

将式 (3.3.2) 和几何方程式 (3.1.4) 代入广义胡克定律式 (3.1.15)，则得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy} + \frac{s_{13}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy} + \frac{s_{23}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= S_{z0} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} + \frac{s_{34}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} + \frac{s_{35}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy} + \frac{s_{36}}{s_{33}}S_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

式中,

$$\beta_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (3.3.4)$$

称做折减顺度系数。对方程式 (3.3.3) 中的第 3、4、5 式进行积分得

$$\left. \begin{aligned} w &= zS_{z0} + W_1(x, y) \\ v &= -\frac{z^2}{2} \frac{\partial S_{z0}}{\partial y} + z(\beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} + \frac{s_{34}}{s_{33}}S_{z0}) + V_1(x, y) \\ u &= -\frac{z^2}{2} \frac{\partial S_{z0}}{\partial z} + z(\beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} + \frac{s_{35}}{s_{33}}S_{z0}) + U_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

上式表明, 一般情况下位移分量  $u$ 、 $v$  将是  $z$  的二次函数。再将式 (3.3.5) 代入式 (3.3.3) 的第 1、2、6 三式, 并比较等号两边含  $z$  和  $z^2$  项的系数, 则有

$$\frac{\partial^2 S_{z0}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S_{z0}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S_{z0}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \cdots + \beta_{56}\tau_{xy} + \frac{s_{35}}{s_{33}}S_{z0} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \cdots + \beta_{46}\tau_{xy} + \frac{s_{34}}{s_{33}}S_{z0} - \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \cdots + \beta_{56}\tau_{xy} + \frac{s_{35}}{s_{33}}S_{z0} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \cdots + \beta_{46}\tau_{xy} + \frac{s_{34}}{s_{33}}S_{z0} - \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \cdots + \beta_{16}\tau_{xy} + \frac{s_{13}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \cdots + \beta_{26}\tau_{xy} + \frac{s_{22}}{s_{33}}S_{z0} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \cdots + \beta_{66}\tau_{xy} + \frac{s_{36}}{s_{33}}S_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.8)$$

对式 (3.3.6) 积分得

$$S_{z0} = B_1x + B_2y + B_3 \quad (3.3.9)$$

式中, 积分常数  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  由端面平衡边界条件确定。

引入刚体位移

$$\left. \begin{aligned} u' &= \omega_2 z - \omega_3 y + u_0 \\ v' &= \omega_3 x - \omega_1 z + v_0 \\ w' &= \omega_1 y - \omega_2 x + w_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

式中, 任意常数  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  分别是柱体绕坐标轴  $x, y, z$  的刚体转动分量;  $u_0, v_0, w_0$  则是沿坐标轴的刚体平移分量。再引入新的位移函数  $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ , 以代替式 (3.3.5) 中的位移函数  $U_1, V_1, W_1$ , 即令

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + \omega_3 y - u_0 \\ V &= V_1 - \omega_3 x - v_0 \\ W &= W_1 - \omega_1 y + \omega_2 x - w_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.11)$$

首先积分式 (3.3.7) 的前两式, 使之满足第 3 式, 利用上式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \beta_{15} \sigma_x + \beta_{25} \sigma_y + \cdots + \beta_{56} \tau_{xy} + \frac{s_{35}}{s_{33}} S_{z0} + \vartheta y + \omega_2 \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \beta_{14} \sigma_x + \beta_{24} \sigma_y + \cdots + \beta_{46} \tau_{xy} + \frac{s_{34}}{s_{33}} S_{z0} - \vartheta x + \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.12)$$

将式 (3.3.11) 和式 (3.3.12) 代入式 (3.3.5), 则得

$$\left. \begin{aligned} w &= (B_1 x + B_2 y + B_3) z + W(x, y) + w' \\ v &= -\frac{B_2}{2} z^2 + \vartheta x z + V(x, y) + v' \\ u &= -\frac{B_1}{2} z^2 - \vartheta y z + V(x, y) + u' \end{aligned} \right\} \quad (3.3.13)$$

式中, 刚体位移常数 ( $u_0, v_0, w_0; \omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) 须由端面固定条件确定, 且只需给定 6 个条件。然后从式 (3.3.8) 与式 (3.3.12) 中消去函数  $U, V, W$ , 得到用应力分量表达的微分关系式

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta_{11} \sigma_x + \beta_{12} \sigma_y + \cdots + \beta_{16} \tau_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta_{12} \sigma_x + \beta_{22} \sigma_y + \cdots + \beta_{26} \tau_{xy}) - \quad (3.3.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\beta_{16} \sigma_x + \beta_{26} \sigma_y + \cdots + \beta_{66} \tau_{xy}) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial y} (\beta_{15} \sigma_x + \beta_{25} \sigma_y + \cdots + \beta_{56} \tau_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} (\beta_{14} \sigma_x + \beta_{24} \sigma_y + \cdots + \beta_{16} \tau_{xy}) \\ & = -2\vartheta + (B_1 s_{34} - B_2 s_{35}) / s_{33} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

上面两式即为以应力分量表达的各向异性弹性体空间扭转问题的相容方程。如果将平面问题和简单扭转问题的两个应力函数  $F(x, y), \phi(x, y)$  表达式代入平衡微分方程式 (3.1.2),

显然它们恒被满足；将它们代入式 (3.3.14) 和式 (3.3.15)，则得到以应力函数表达的相容方程

$$L_4 F + L_3 \phi = -(\beta_{12} + \beta_{22}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + (\beta_{16} + \beta_{26}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y} - (\beta_{11} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \quad (3.3.16)$$

$$L_3 F + L_2 \phi = -2\vartheta - \frac{B_1 s_{34} - B_2 s_{35}}{s_{33}} + (\beta_{14} + \beta_{24}) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - (\beta_{15} + \beta_{25}) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (3.3.17)$$

这里微分算子为

$$\left. \begin{aligned} L_4 &\equiv \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3 &\equiv -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 &\equiv \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.18)$$

式 (3.3.17) 与式 (3.3.18) 为一般各向异性弹性体的空间扭转问题基本控制方程组。对于一般各向异性弹性体而言，其三阶微分算子  $L_3$  中的系数不等于零，所以式 (3.3.17) 与式 (3.3.18) 是相互耦合的。

### 3.3.2 各向异性弹性体空间扭转问题的边界条件

当弹性体的侧表面分布载荷分量  $X_n(s), Y_n(s) (Z_n(s)=0)$  给定时，由于侧表面外法线与  $z$  轴垂直，即  $\cos(n, z) = 0$ ，柱体侧表面上的边界条件将可写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.19)$$

将应力函数  $\phi(x, y)$  代入式 (3.3.19) 的第 3 式，并考虑到式 (3.3.15)，则得

$$\phi|_r = c_3 \quad (3.3.20)$$

这里常数  $c_3$  可由任意周线确定，对于单连通域可取  $c_3=0$ 。

在弹性体的端面上，给定扭矩  $M_t$ ，这时端面条件可等价地写成

$$\left. \begin{aligned} \iint \tau_{xz} dx dy &= 0, \quad \iint \sigma_z y dx dy = 0 \\ \iint \tau_{yz} dx dy &= 0, \quad \iint \sigma_z x dx dy = 0 \\ \iint \sigma_z dx dy &= 0, \quad \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M_t \end{aligned} \right\} \quad (3.3.21)$$

式中二重积分表示在柱体端面的整个区域上进行。不难证明上述条件中的前两式是恒满足的,而其余4个方程可利用式(3.3.2)和式(3.3.9)写成下列形式

$$B_3 A - \iint (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{36}\tau_{xy}) dx dy = 0 \quad (3.3.22)$$

$$B_2 I_1 - \iint (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{36}\tau_{xy}) y dx dy = 0 \quad (3.3.23)$$

$$B_1 I_2 - \iint (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{36}\tau_{xy}) x dx dy = 0 \quad (3.3.24)$$

$$\iint (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy = M_t \quad (3.3.25)$$

这里,  $A, I_1, I_2$  分别表示横截面的面积及其对  $x$  轴和  $y$  轴的主惯性矩。考虑单连通域的情况,将坐标原点置于截面形心,且坐标轴取与主惯性轴一致,利用平衡方程式(3.1.2)和侧表面的边界条件式(3.3.19),可得到如下等式

$$\iint x \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( x\sigma_x - \sigma_x + \frac{\partial(x\tau_{xy})}{\partial y} + xX \right) \right] dx dy = 0 \quad (3.3.26)$$

由此式可解出

$$\begin{aligned} \iint \sigma_x dx dy &= \iint \frac{\partial}{\partial x} (x\sigma_x) dx dy + \iint \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{xy}) dx dy + \iint xX dx dy \\ &= \int_{\gamma} [x\sigma_x \cos(n, x) + x\tau_{xy} \cos(n, y)] ds + \iint xX dx dy \\ &= \int_{\gamma} xX_n ds + \iint xX dx dy \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

同样可以导出所有应力分量与  $x, y$  乘积的积分公式,利用这些结果代入式(3.3.22)~式(3.3.25),将有

$$\left. \begin{aligned} B_3 A - \int_{\gamma} [(s_{13}x + s_{36}y)X_n + s_{23}Y_n] ds - \\ \iint [(s_{13}x + s_{36}y)X - s_{23}Y] dx dy &= 0 \\ B_2 I_1 - \int_{\gamma} [(s_{13}xy + \frac{1}{2}s_{36}y^2)X_n + \frac{1}{2}(s_{23}y^2 - s_{13}x^2)Y_n] ds - \\ \iint [(s_{13}xy + \frac{1}{2}s_{36}y^2)X + \frac{1}{2}(s_{23}y^2 - s_{13}x^2)Y] dx dy + \frac{1}{2}s_{35}M_t &= 0 \\ B_1 I_2 - \int_{\gamma} [(s_{23}xy + \frac{1}{2}s_{36}x^2)X_n + \frac{1}{2}(s_{13}x^2 - s_{23}y^2)Y_n] ds - \\ \iint [(s_{23}xy + \frac{1}{2}s_{36}x^2)X + \frac{1}{2}(s_{13}x^2 - s_{23}y^2)Y] dx dy - \frac{1}{2}s_{34}M_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.28)$$

当给定外载荷  $M_t$  时,则可根据式(3.3.22)~式(3.3.24)确定  $S_{z_0}$  表达式(3.3.9)中



的常数  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$ 。而位移表达式中的另一个常数  $\vartheta$ ，则可由公式 (3.3.25) 确定，因为

$$\iint (\tau_{xz}x - \tau_{yz}y) dx dy = - \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) \right] dx dy + 2 \iint \phi dx dy \quad (3.3.29)$$

对于多连通域，只能在一条闭合边界上（通常取外边界）令  $\phi = 0$ ，在其他边界上则为待定常数  $k$ ，此时式 (3.3.29) 为

$$\begin{aligned} M_t &= \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy = \iint \left( -x \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) - \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) + 2\phi \right] dx dy \\ &= -\oint_{\Gamma} \phi (xl_1 + yl_2) ds + 2 \iint \phi dx dy \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

式中， $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$  是横截面单位法向量。

对于单连通域， $\phi|_{\Gamma} = 0$ ，所以第一项为零。由此得扭矩公式

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \quad (3.3.31)$$

但是，对于多连通域，当它由两条边界封闭曲线所围成时，则  $\phi|_{\Gamma_1} = k_1 = 0$ ， $\phi|_{\Gamma_2} = k_2 \neq 0$ ，利用下面的关系式

$$\oint_{\Gamma} (x dy - y dx) = \pm 2A_{\Gamma} \quad (3.3.32)$$

其中， $A_{\Gamma}$  表示闭合曲线  $\Gamma$  所包围的面积。当该面积在积分回路左侧时，上式右端取正号，否则取负号。这样式 (3.3.30) 的第一项可写成

$$-\oint_{\Gamma} \phi (xl_1 + yl_2) ds = -k_1 \oint_{\Gamma_1} (x dy - y dx) ds - k_2 \oint_{\Gamma_2} (x dy - y dx) ds = 2k_2 A_2$$

所以扭矩公式写成

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy + 2k_2 A_2 \quad (3.3.33)$$

### 3.3.3 各向异性弹性体空间扭转问题的解法

当外力为

$$X_n = Y_n = \bar{U} = 0 \quad (3.3.34)$$

在这种情况下，基本方程式 (3.3.16)、式 (3.3.17) 及其边界条件式 (3.3.19)、式 (3.3.20) 可简化成下列扭转问题的基本方程和边界条件。

$$L_4 F + L_3 \phi = 0 \quad (3.3.35)$$

$$L_3 F + L_2 \phi = -2\vartheta - \frac{B_1 s_{34} - B_2 s_{35}}{s_{33}} \quad (3.3.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = c_2, \quad \phi|_r = c_3 \quad (3.3.37)$$

利用式 (3.3.28) 可求得

$$B_1 = -\frac{s_{34}}{2I_2} M_t, \quad B_2 = -\frac{s_{35}}{2I_1} M_t, \quad B_3 = 0 \quad (3.3.38)$$

将它们代入式 (3.3.36) 中, 则有

$$L_3 F + L_2 \phi = -2\vartheta + \frac{M_t}{2s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \quad (3.3.39)$$

由于方程式 (3.3.39) 的右端为常数项, 故其非其次特解  $\phi_0$  可写成如下的形式

$$\phi_0 = \left[ -\frac{\vartheta}{2} + \frac{M_t}{8s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \frac{\beta_{55}x^2 + 2\beta_{45}xy + \beta_{44}y^2}{\beta_{44}\beta_{55} - \beta_{45}^2} \quad (3.3.40)$$

于是应力函数的形式为

$$\phi(x, y) = \left[ \vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \bar{\phi}(x, y) \quad (3.3.41)$$

这里常数  $\vartheta$  可由式 (3.3.33) 确定, 将式 (3.3.41) 代入即得

$$\vartheta = \left[ \frac{1}{\bar{c}} + \frac{1}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] M_t \quad (3.3.42)$$

或写成

$$\vartheta = M_t / c_t \quad (3.3.43)$$

式中,

$$c_t = \frac{\bar{c}}{1 + \frac{\bar{c}}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right)} \quad (3.3.44)$$

$$\bar{c} = 2 \iint \bar{\phi} dx dy \quad (3.3.45)$$

纵上所述, 广义扭转问题归结为求解满足基本微分方程式 (3.3.35) 和式 (3.3.39) 及边界条件式 (3.3.37) 的未知函数  $\bar{\phi}(x, y)$ 。当给定各向异性体的截面几何形状及材料弹性常数时, 则  $\bar{\phi}(x, y)$  一般是可以确定的。于是由式 (3.3.41) 和式 (3.3.43) 可得到  $\phi(x, y)$  和

$\bar{c}$ 。如果有了函数  $\phi(x, y)$ ，可以直接求得剪应力分量

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.3.46)$$

并由式 (3.3.2)、式 (3.3.38) 和下式

$$\sigma_z = \frac{1}{s_{33}}(B_1 x + B_2 y + B_3) - \frac{1}{s_{33}}(s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) \quad (3.3.47)$$

可求得

$$\sigma_z = \frac{M_t}{2s_{33}}\left(\frac{s_{34}}{I_2}x - \frac{s_{35}}{I_1}y\right) - \frac{1}{s_{33}}(s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) \quad (3.3.48)$$

## 第 4 章

# 压电效应电学基础

由压电体性质可知，在应力作用下压电效应必将导致在压电体内部出现极化现象。因为石英属于各向异性材料，其极化电场也必将各向异性，此时极化电场满足各向异性麦克斯韦电磁理论。

### 4.1 自由空间的电磁场定律

在电磁理论的发展过程中，麦克斯韦在法拉第的基础上提出了“场”的概念，并总结出完整的电磁场方程——麦克斯韦方程组，完成了电磁场的理论结构。场是一个非常重要的概念，是客观存在的一种物质形式，它具有特殊的运动规律，可以弥漫在空间中。场的量可以随空间位置和时间不同而变化，即场量可以表示为空间与时间的函数，任何一个可以表示成空间和时间函数的量都可以称为场。

#### 4.1.1 自由空间的积分电磁场定律

自由空间中的麦克斯韦方程组有下面 5 个：

法拉第电磁感应定律：
$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{a} \quad (4.1.1)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.2)$$

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_\tau \rho d\tau = Q_{\text{net}} \quad (4.1.3)$$

$$\oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (4.1.4)$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_\tau \rho d\tau = -\frac{dQ_{\text{net}}}{dt} \quad (4.1.5)$$

式中,  $\mathbf{E}$  是电场强度;  $\mathbf{H}$  是磁场强度;  $\rho$  是体电荷密度;  $\mathbf{J}$  是电流密度;  $\tau$  是体积分域;  $S$  是面积分域;  $C$  是线积分域;  $Q$  是电荷量。

由于这 5 个场定律中出现的都是场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  和源量  $\rho$ 、 $\mathbf{J}$  的线、面、体积分, 故这 5 个场定律又称为积分形式的场定律。场定律的基础是实验事实, 法拉第电磁感应定律也是一个实验定律, 安培环路定律可由毕奥 (Biot) - 萨伐尔 (Savart) 定律得出, 电场高斯定律可以由库仑定律得出, 磁场高斯定律可由毕奥 (Biot) - 萨伐尔 (Savart) 定律得出, 电荷守恒定律是由实验所证实的。

法拉第电磁感应定律的物理意义为: 在自由空间中, 沿一条闭合路径的电动势等于与该路径交链的磁通量 (穿过以闭合路径为边界的任何一个曲面的磁通量) 的减少率 (对时间变化率的负值)。也就是说, 时变的磁场可以产生涡旋电场。安培环路定律的物理意义为: 在自由空间中, 磁场强度  $\mathbf{H}$  沿一条闭合曲线的环流量 (磁动势), 等于与该曲线交链的电流量与交链的电通量增加率之和, 因为  $\frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{a}$  也称为位移电流, 所以公式的物理意义也说成是磁场沿闭合曲线的环流量等于与该曲线交链的电流量与位移电流量之和 (全电流)。电场高斯定律的物理意义: 在自由空间中, 一个闭合曲面内穿过的电通量等于所包围的全部体积内的净电荷量。磁场高斯定律的物理意义为: 在自由空间中, 由任何一个闭合曲面内穿出的净磁通量都为零, 也就是说, 不存在磁通密度矢量的源——磁荷。电荷守恒定律的物理意义为: 对于一个体积为  $V$ , 外表面为  $S$  的系统, 只有当有电荷进出时, 系统内的净电荷量才会改变, 若系统与外界没有电荷交换, 即系统为一个电荷封闭系统, 则系统内的净电荷量是不变的。也就是说, 电荷只能以电流形式转移, 而不能自行产生或消失, 这就是电荷守恒定律。

## 4.1.2 自由空间的微分电磁场定律

利用散度定理和斯托克斯定理等矢量分析知识, 可将积分形式的场定律转化为微分形式, 对于良态场可得到与式 (4.1.1) ~ 式 (4.1.5) 相对应的微分形式麦克斯韦方程组。

法拉第电磁感应定律：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \mu_0 \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

(4.1.6)

安培环路定律：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

(4.1.7)

电场高斯定律：

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \rho$$

(4.1.8)

磁场高斯定律：

$$\nabla \cdot \mu_0 \boldsymbol{H} = 0$$

(4.1.9)

电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(4.1.10)

4.1.3 场定律整体含义

电磁场定律在电磁场理论中的地位就如同牛顿力学定律在理论力学中的地位一样。凡是真实存在的电磁场的行为必服从电磁场定律。而在非相对论范围内，电磁场的行为必定服从积分形式的电磁场定律。从场定律的形式上看，电磁场定律是电磁场量  $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{H}$  与它们的源量  $\rho$ 、 $\boldsymbol{J}$  间相互关系的表达式，这可用图 4-1 表示，图中用 “→” 表示直接关系，“----->” 表示时变关系。

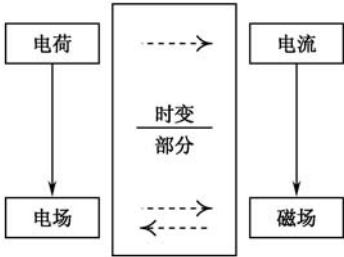


图 4-1 电磁场量与源量之间的关系

积分形式的电磁场定律适用于非相对论的经典电磁场问题。在电磁场理论中，积分形式的电磁场定律主要是用在理论研究上，而在解析求解具体的电磁场问题时，应用的价值较小。这主要是因为使用积分形式的电磁场定律解题时，必须选定一个适当的积分区域使积分可以计算，这就涉及数学上的运算是否可行的问题。因此用积分形式的电磁场定律求解的问题需具有一定形式的对称性。微分形式的电磁场定律中各式确定了电磁场、源之间的微分关系。一切良态的电磁场的场、源均服从这些关系式。需要指明的一点是，由于对空间各点来说，微分场定律只涉及每个点本身的场、源关系，而不涉及区域中其他各点，因此，它不受宏观尺度的限制。而进一步的研究可以使我们看到，这些定律包含了光速不变原理，也就是说，这些定律是与相对论原理相符合的。

### 4.1.4 电磁场边界条件

麦克斯韦电磁场定律 5 个公式中只有 3 个独立。这 3 个互相独立的定律含有 7 个方程（每个矢量方程包含 3 个标量方程），却包含 10 个未知数（一个矢量未知量含有 3 个未知标量）。因此，场定律是电磁场问题的泛定方程。在具体问题求解时，一般还应根据问题本身的条件加以补充，即电磁场问题的边界条件。

在两区域的交界面处，若两区域的某种电磁性质不相同，则在越过交界面时，电磁性质会有变化。通常把场发生变化的过渡层看成一个厚度为零的界面，而电磁性质在通过这个界面时，便发生跃变来处理，这样可得到电磁场的边界条件。

$$\mathbf{i}_n \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_2) = \eta \quad (4.1.11)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mu_0 \mathbf{H}_1 - \mu_0 \mathbf{H}_2) = 0 \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) + \nabla \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.1.13)$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (4.1.14)$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \quad (4.1.15)$$

式中， $\mathbf{i}_n$  是界面的法向方向，规定为由域 2 指向域 1； $\eta$  是界面上的电荷密度； $\mathbf{K}$  是界面上的面电流密度。

式（4.1.11）说明若在边界上有面电荷分布，则在越过边界时，电通矢量在边界法线方向上的分量要改变，改变的值等于面电荷密度，也就是说，在有面电荷存在时，边界两边电通矢量的法线分量不连续。式（4.1.12）说明在越过边界时，磁通矢量在边界法线方向上的分量不改变，也就是说边界两边的磁通矢量的法线分量是连续的。式（4.1.13）表达了在边界上各处，电荷守恒定律是成立的。式（4.1.14）说明当越过边界时，电场强度在边界的切线方向上的分量是不改变的，即在边界两边电场强度的切线分量是连续的。式（4.1.15）说明若边界上有面电流存在，则磁场强度在边界切线方向的分量在越过边界时要改变。

## 4.2 静电场标量位

源量、场量都与时间无关的电场问题称为静电场问题。由于静电场是与时间无关的，因此，在场定律中，所有的时间导数项均为零。这样，静电场的场定律应为

$$\nabla \times \mathbf{E}(r) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}(r) = \rho(r) \quad (4.2.2)$$

### 4.2.1 静电场标量位的引入

由式 (4.2.1) 的  $\nabla \times \mathbf{E}(r) = 0$  可知, 静电场是保守场 (无旋场)。由矢量分析可知  $\nabla \times \nabla f = 0$ , 所以可以用一个标量场梯度来表示一个静电场, 即可令

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla V(r) \quad (4.2.3)$$

将标量场  $V(r)$  称为静电场  $\mathbf{E}(r)$  的标量位 (电位)。根据梯度的性质可以知道, 在空间各点, 电场总是与等位面 (标量位的等值面) 相垂直并且指向标量位场值降低的方向。

### 4.2.2 静电场标量位的微分方程

在理论上, 对于已知全部电荷分布的系统, 可以由下式

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho(r)}{R} + \int_S \frac{\eta(r)}{R} + \int_C \frac{\lambda(r)}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} \right] \quad (4.2.4)$$

求出它的电位分布, 从而求出系统的电场分布。但是, 在很多问题中, 这样的积分并不是简单的。可以从另外一个角度来研究, 即找出标量位应满足的微分方程, 再对它求解。

将式 (4.2.3) 代入式 (4.2.2) 中, 可得到

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}(r) = \nabla \cdot \epsilon_0 (-\nabla V) = -\epsilon_0 \nabla^2 V = \rho(r) \quad (4.2.5)$$

式中,  $\nabla^2 V$  表示对电位进行拉普拉斯运算, 在直角坐标系中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

因此, 标量位的泊松 (Poisson) 方程为

$$\nabla^2 V = -\rho(r)/\epsilon_0 \quad (4.2.6)$$

在没有电荷的区域中,  $\rho = 0$ , 这时标量位的微分方程就化为拉普拉斯方程。

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4.2.7)$$

泊松方程和拉普拉斯方程是静电电位场的基本方程, 它们适用于电位为良态场的情况。

## 4.3 有物质存在时的宏观场定律

电磁场理论是从电磁性质的角度来研究物质的。这时, 物质只是以不同形式运动的无数带电粒子的集合, 而各种电荷和电流都应该看成电磁场的源。因而, 由于物质的存在而



引入的各种分布形式的电荷和电流与电磁场的相互作用,就可以代替物质与电磁场的相互作用。这样,在计算物质存在下的电磁场问题时,一旦求得与存在的物质等效的电荷和电流分布,即可将物质“抽去”不再考虑,而将那些等效的电荷和电流分布当做真空中已知的电荷和电流分布来处理,从而就可使用没有物质存在的方法来求解有物质存在的电磁场问题了。可以把这种处理问题的方法归结为一项基本法则,即“在有物质存在时,电磁场所遵循的基本定律即是真空中的电磁场定律,只是此时应该将物质在电磁场作用下所形成的等效宏观电荷和电流分布也看做处于真空中的电磁场源来处理”。

### 4.3.1 极化强度的概念

在外电场的作用下,物质处于极化状态,可将每个被极化粒子都看成一个电偶极子,而处于极化状态的物质不过是无数有序排列的电偶极子的集合体。为了研究物质极化现象,需要对物质内极化程度进行宏观描述。为此,引入极化强度的概念,极化强度  $\mathbf{P}$  的定义为

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2) \quad (4.3.1)$$

式中,  $\Delta V$  是一宏观体元,但在微观上要足够大,以便其中能够包含足够多的电偶极子而不会出现量子效应,使由于时间的推移或由一个  $\Delta V$  到相邻的一个  $\Delta V$  之间的起伏可以忽略不计;  $\mathbf{p}_i$  是  $\Delta V$  内第  $i$  个电偶极子的电矩。因此,  $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$  即为  $\Delta V$  内的总偶极矩,而某点的极化强度  $\mathbf{P}$  就可以理解为极化物质内该点的偶极矩密度。极化强度  $\mathbf{P}$  是在给定点上每单位体积内的偶极矩,它是宏观量,一般来说它是空间位置与时间的函数。

在  $\Delta V$  很小的情况下,宏观上,可以认为  $\Delta V$  内包含的所有电偶极子都具有相同的大小和方向。因此,根据式 (4.3.1) 的定义可以得到

$$\mathbf{P} = Nqd = \rho_0 d \quad (\text{C/m}^2) \quad (4.3.2)$$

式中,  $N$  是某点的电偶极子数密度;  $q$  是电偶极子电荷量;  $d$  是电偶极子极距;  $\rho_0$  是该点的正束缚电荷的密度。

### 4.3.2 极化电荷密度

物质在未被极化时,宏观上没有电性效果,也就是呈电中性。当受到极化时,宏观上的电中性将被破坏,而对外界呈现电性效果。也就是说,在宏观上,极化物质可以看做一个电荷分布体系。显然,所说的极化电荷是一种宏观等效净电荷。

图 4-2 画出了单位体积内有偶极矩  $\mathbf{P}$  的一块电介质,  $\mathbf{P}$  在电介质内部, 是位置的函数。现在来计算外部一点  $P(x, y, z)$  上由电介质的偶极子群所产生的电势  $V$ ,  $P(x, y, z)$  的总电势梯度的负值, 就是这一点的电场强度。

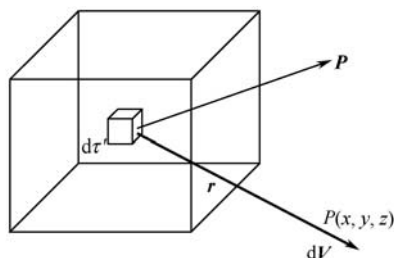


图 4-2 电介质外的电场

在点  $P(x, y, z)$ , 由位于  $(x', y', z')$  点的偶极子  $\mathbf{P}d\tau$  所产生的电势  $dV$  可由电偶极子的电势

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (4.3.3)$$

得到

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} d\tau \quad (4.3.4)$$

由  $\nabla' \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$  得

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad (4.3.5)$$

式中,  $\nabla'$  是对场的源点  $(x', y', z')$  运算的。在这里假设距离  $r$  比分子的尺寸大很多, 所以作为电偶极子的近似是成立的。对整块电介质进行积分

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \left[ \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau \quad (4.3.6)$$

假设  $\mathbf{P}$  是已知函数, 利用下面的矢量恒等式进行变换

$$\nabla \cdot f\mathbf{A} = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (4.3.7)$$

式中,  $f$  和  $\mathbf{A}$  分别是标量函数和矢量函数, 令  $1/r$  是标量函数,  $\mathbf{P}$  是矢量函数, 则式 (4.3.6) 可化为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \left( \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \left( \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} \right) d\tau \quad (4.3.8)$$

利用散度定理, 可以把第一项化成面积分, 即

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \left( \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} \right) d\tau' \quad (4.3.9)$$

式中,  $s'$  是包围体积  $\tau'$  内电介质的曲面, 矢量  $d\mathbf{a}$  指向外。可以看出, 式 (4.3.9) 中的两项正好是由面电荷分布与体电荷分布而产生的电势, 从而可得出电介质的极化面电荷密度为

$$\eta_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (4.3.10)$$

式中,  $\mathbf{n}$  是电介质表面上的外法向的单位矢量。

极化体电荷密度为

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.3.11)$$

因此, 在任何一点, 极化电荷的体密度就等于该点极化强度  $\mathbf{P}$  的负散度。

## 4.4 各向异性介质宏观场定律

### 4.4.1 各向异性介质的一般特性

有些电介质在外电场的作用下, 晶体在不同方向上引起不同的极化效果, 从而表现出各向异性, 使晶体沿某一方向的极化强度不仅与该方向的电场有关, 而且同时与其他方向的电场有关。一般来说,  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  的关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \epsilon_0 \chi_{11} \mathbf{E}_1 + \epsilon_0 \chi_{12} \mathbf{E}_2 + \epsilon_0 \chi_{13} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{P}_2 &= \epsilon_0 \chi_{21} \mathbf{E}_1 + \epsilon_0 \chi_{22} \mathbf{E}_2 + \epsilon_0 \chi_{23} \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{P}_3 &= \epsilon_0 \chi_{31} \mathbf{E}_1 + \epsilon_0 \chi_{32} \mathbf{E}_2 + \epsilon_0 \chi_{33} \mathbf{E}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

采用 Einstein 求和惯例, 可将上式改写成

$$\mathbf{P}_i = \epsilon_0 \chi_{ij} \mathbf{E}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4.2)$$

式中, 脚标  $i$  和  $j$  代表 3 个坐标方向  $x, y, z$ 。  $\mathbf{P}$  的所有 3 个分量都依赖于  $\mathbf{E}$  的所有 3 个分量, 每个都有不同的极化系数。所有极化系数都有 9 个分量, 构成一个二阶张量。显然  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  的关系仍然是线性的, 但形式上已经变得复杂了。

将式 (4.4.2) 代入电位移  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  得

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (4.4.3)$$

式中,  $\epsilon_r = \epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ;  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  是张量的并矢;  $\epsilon_0$  是介电系数常量。

### 4.4.2 各向异性介质麦克斯韦方程组

各向异性介质的存在只是改变物质中场量  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$  之间的关系，但电磁场基本方程形式上没有改变，从而得到各向异性介质中的麦克斯韦方程组

$$\text{法拉第电磁感应定律:} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu_0 \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.4.4)$$

$$\text{安培环路定律:} \quad \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (4.4.5)$$

$$\text{电场高斯定律:} \quad \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho \quad (4.4.6)$$

$$\text{磁场高斯定律:} \quad \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} = 0 \quad (4.4.7)$$

$$\text{电荷守恒定律:} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.4.8)$$

$$\text{电场本构方程:} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} \quad (4.4.9)$$

$$\text{磁场本构方程:} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \mathbf{H} \quad (4.4.10)$$

此时，各向异性介质电磁场边界条件为

$$\mathbf{i}_n \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_1 - \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mathbf{E}_2) = \eta \quad (4.4.11)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mu_0 \mu_r \cdot \mathbf{H}_1 - \mu_0 \mu_r \cdot \mathbf{H}_2) = 0 \quad (4.4.12)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) + \nabla \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.4.13)$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (4.4.14)$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \quad (4.4.15)$$

### 4.4.3 各向异性介质标势满足的方程

在静电场的情况下，上述方程组变为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.4.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.4.17)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} \quad (4.4.18)$$

显然，由式 (4.4.16) 得知

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (4.4.19)$$

式中， $V$  为各向异性介质中静电场的标势。

把式(4.4.19)带入式(4.4.18)后, 所得的结果再代入式(4.4.17)得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.4.20)$$

引入并矢

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (4.4.21)$$

将式(4.4.21)代入式(4.4.20)中, 整理得到在各向异性介质中静电势所满足的方程, 展开即得到含系数的泊松(Poisson)方程。

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.4.22)$$

在没有电荷的区域中,  $\rho=0$ , 这时标量位的微分方程就化为拉普拉斯方程

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (4.4.23)$$

泊松方程和拉普拉斯方程是静电电位场的基本方程, 它们适用于在各向异性介质中电位为良态场的情况。

#### 4.4.4 各向异性介质标势所满足的边界条件

在边界处, 如同电场要满足一定的边界条件一样, 电位也要满足一定的边界条件。这些边界条件可以直接由电场的边界条件以及电场和电位之间的关系来得到。

对于区域1和区域2的交界面, 规定它的法线方向 $\mathbf{i}_n$ 由区域2指向区域1, 如图4-3所示。

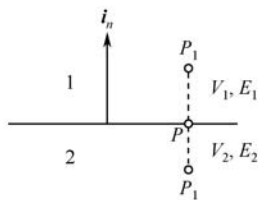


图 4-3 电势边界条件

将 $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$ 和 $\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2$ 代入边界条件式(4.1.11)中, 注意到 $\mathbf{i}_n \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial n}$ , 则可得

$$\left[ \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial V_1}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \eta(\mathbf{r}) \quad (4.4.24)$$

这是电位满足的一个边界条件。

对于式 (4.1.14)，因为它与  $\mathbf{E}_{1t} - \mathbf{E}_{2t} = 0$  等效，从而可得

$$\left[ \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - \frac{\partial V_2}{\partial \tau} \right]_{\Sigma} = 0 \quad (4.4.25)$$

但是由于边界的切线方向不是唯一的，因此，使用式 (4.4.25) 作为边界条件并不方便。通常使用另外一个能够满足式 (4.4.25) 且更为方便的边界条件——电位连续条件。

由标量位的性质可知，区域 1 中的  $P_1$  点和区域 2 中的  $P_2$  点之间的电位差为

$$V_{P_1} - V_{P_2} = - \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_P^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.4.26)$$

如果令  $P_1, P_2 \rightarrow P$ ，在极限情况下就得到电位应该满足的边界条件，即

$$\lim_{\substack{P_1 \rightarrow P \\ P_2 \rightarrow P}} (V_{P_1} - V_{P_2}) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \left( - \int_{P_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) + \lim_{P_2 \rightarrow P} \left( \int_P^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (4.4.27)$$

这样就得到电位在边界处连续。

$$V_1(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r}) \quad (4.4.28)$$

这是电位满足的另一个边界条件。

最终，各向异性介质静电场问题的求解可转化为在满足边界条件式 (4.4.24)、式 (4.4.28) 情况下求解泊松方程式 (4.4.22) 的问题。

## 第 5 章

# 石英晶片拉压效应研究

石英晶片的拉压效应是指对于特定切型的石英晶片在拉力、压力作用下出现极化电荷的现象。本章将介绍石英晶片拉压效应的应力、极化电荷、极化电场分布及其他在传感器中的应用。

### 5.1 石英压电效应基础知识

#### 5.1.1 压电效应的机理

考虑一电偶极子，所谓电偶极子是指间隔一定距离、极性相反的两个等量电荷。图 5-1 所示的是电荷为  $+q$  和  $-q$ ，间隔距离为  $d$  的电偶极子。电偶极距的定义为电荷与距离的乘积。因此，图 5-1 中的电偶极距就是  $qd$ ，电偶极距是一种矢量，其方向是从负电荷指向正电荷。

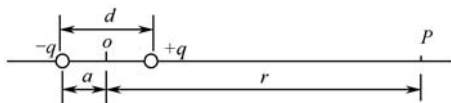


图 5-1 电偶极子

现求离电荷连线中间距离为  $r$  (设  $r \gg d$ ) 的  $P$  点的电场强度, 方法是先求  $P$  点的静电电位, 再用  $\mathbf{E} = -\partial V / \partial r$  来求场强。离电荷连线中心处的距离为  $r$  处的电位, 可以简单地用下式计算

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = k \frac{q}{r} \quad (5.1.1)$$

式中,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$

几个电荷在某点引起的电位是各电荷所起作用的代数和, 即

$$V_P = k \left( \frac{+q}{r-a} + \frac{-q}{r+a} \right) = kq \frac{2a}{r^2 - a^2} \quad (5.1.2)$$

若  $a^2$  与  $r$  相比较可以忽略, 则

$$V_P = \frac{2kqa}{r^2} \quad (5.1.3)$$

因此电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4kqa}{r^3} = \frac{2kqd}{r^3} \quad (5.1.4)$$

式 (5.1.4) 表明离电偶极子很远的某个点上的偶极子电场强度同偶极矩成正比, 因此电偶极子发生任何变化都会引起电场的相应变化, 这就是压电效应的本质。

现在来看二维模型, 设有 6 个电荷, 位置在正六角形的角上, 如图 5-2 所示。取  $x$  轴平行于连接正负电荷的连线, 并设  $a$  为正负电荷间沿此线的距离。

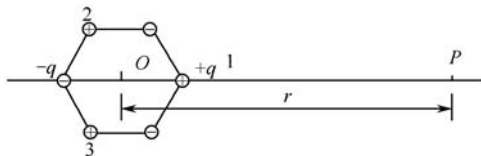


图 5-2 电荷的二维排列图形

下面来计算在  $OP = r$  处  $P$  点的电位  $V$ , 电荷  $q_1$  对电位的作用为  $\frac{kq}{r - \frac{a}{2}}$ 。 $q_2$  和  $q_3$  的作用

都是  $\frac{kq}{r + \frac{a}{4}}$ 。设  $r \gg a$ , 因此从  $q_2$  到  $P$  的连线可看做实际上平行于  $OP$ 。

因此 3 个正电荷在  $P$  点产生的电位是 (忽略了  $a^2/8$  项)

$$V_+ = k \left( \frac{q}{r - a/2} + \frac{2q}{r + a/4} \right) = +\frac{3kq}{r} \quad (5.1.5)$$



这恰好是  $O$  点的电荷  $+3q$  在  $P$  点引起的电位。这样就得到了重要的结果, 3 个电荷与 3 个重合于“重心”的电荷在远处引起相同的电位和场强。同一结果自然适用于 3 个负电荷, 因此  $P$  点的电位和电场为零, 两种作用相互抵消。

现在假设作用于  $y$  轴方向的力使电荷系统变形, 如图 5-3 所示, 3 个正电荷的重心左移, 3 个负电荷的重心则右移。若假定应变使连接  $O$  到电荷  $q_2$  的线逆时针旋转一个小角度  $d\theta$ , 则不难证明  $q_2$  的位移  $x$  分量是  $a\cos 30^\circ d\theta/2$ 。对于电荷  $q_3$  来说, 情况相同。因此可以看出, 3 个正电荷的重心向左位移了  $a\sqrt{3}d\theta/2$ , 而 3 个负电荷的重心则向右位移了同样的距离, 这样就造成了一个电偶极子, 其电偶极矩为

$$p = 3\sqrt{3}qad\theta/2 \quad (5.1.6)$$

若设想晶体是由分子组成的, 这些分子就是如图 5-3 所示的电荷那样排列的离子。假定晶体每单位体积包含  $N$  个分子, 而且每个分子受到相同应变, 于是每单位体积的电偶极矩是

$$P = Np = 3\sqrt{3}Nqad\theta/2 \quad (5.1.7)$$

从而可求得压电应力系数  $e$ , 系数  $e$  由方程  $P = eS$  来确定, 其中  $P$  为电极化强度,  $S$  为应变,  $S = d\theta$ , 则

$$e = 3\sqrt{3}Nqa \quad (5.1.8)$$

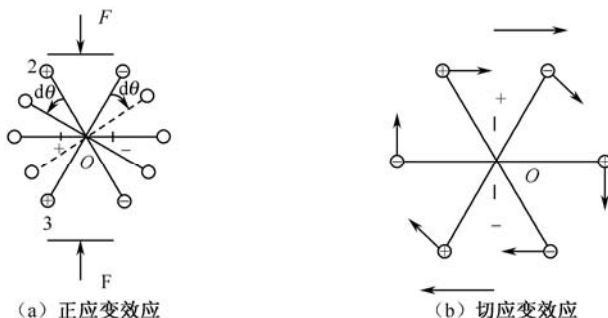


图 5-3 外力对二维电荷模型的影响

切应变对二维电荷模型的影响如图 5-3 (b) 所示。可以看出, 切应变的作用是使 3 个正电荷的重心向上移, 3 个负电荷的重心向下移, 从而重新造成电偶极子, 导致机械变形下的电极化现象, 这就是压电效应的起源。

## 5.1.2 石英晶体的物理与机械性能

当某些电介质晶体在外力作用下发生形变时, 它的某些表面上会出现电荷累积, 这种效应称为正压电效应。具有压电效应的晶体称为压电晶体, 石英是发现最早、应用最广泛

的压电晶体之一。

石英晶体由硅和氧两种元素组成，其分子式为  $\text{SiO}_2$ ，它极难溶于水，密度为  $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，莫氏硬度为 7，熔点为  $1750^\circ\text{C}$ ，它的热膨胀系数和机械滞后均远优于优质钢。它具有较高的力电转换效率、高转换精度、高居里温度、高机械强度、高重复性精度和高绝缘电阻。滞后小，线性和频率响应范围宽，不用人工极化，没有热释电效应，特别是它的振频稳定性非常好。最为突出的特点是石英晶体具有优良的动态品质，自振频率高，它的振频稳定性非常好。从稳定性方面看，至今还没有其他材料可以与石英媲美。

作为力电转换元件的石英晶体，主要是低温型的 $\alpha$ 石英。当温度达到  $573^\circ\text{C}$  时，即转化为 $\beta$ 石英，失去压电效应。无论是天然水晶还是人工培育的水晶，都呈现规则的外形，规则的几何外形是晶体内部结构对称性的反映。一个完整理想的石英晶体，外形可见面共有 30 个晶面，分为左旋和右旋两种。宏观上， $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴都为右手坐标系。对于石英晶体的直角坐标系，按现通用的 IRE 标准规定，如图 5-4 所示。

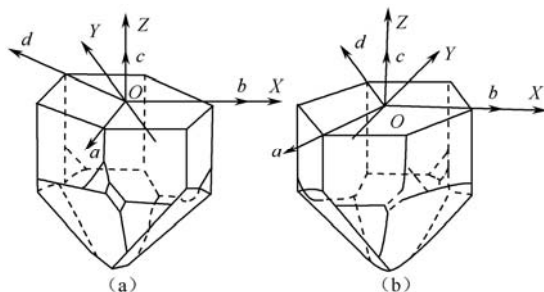


图 5-4 石英晶体的晶轴和直角坐标系

- $X$  轴又称为电轴：沿  $X$  轴方向施加机械应力时，在晶体  $X$  面上产生的束缚电荷最强，即压电效应最为显著，但每电轴两端所产生的电荷为异性，左右旋石英晶体的电轴极性也不同。
- $Y$  轴又称为机械轴：沿  $Y$  轴方向施加机械应力时，产生的形变最大。由于  $Y$  轴方向垂直于晶体的二次轴  $X$  轴，显然单纯从  $Y$  方向使晶体做伸长或缩短时，对晶体在  $Y$  方向的压电效应无贡献。
- $Z$  轴又称为光轴：因为光线沿  $Z$  轴通过晶体时不产生双折射现象，因此在  $Z$  轴方向压电效应无贡献。

### 5.1.3 石英的压电机理

石英晶体之所以具有压电性，是与晶体内部结构有关的。为讨论方便，将这些硅、氧离子等效为图 5-5 中所示的正六边形排列，图中“+”代表  $\text{Si}^{4+}$ ，“-”代表  $2\text{O}^{2-}$ 。

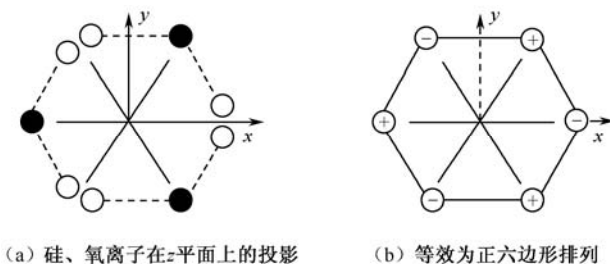


图 5-5 将硅、氧离子等效为正六边形排列

当晶体未受力的作用时，正、负离子（ $\text{Si}^{4+}$ 和 $2\text{O}^{2-}$ ）正好分布在正六边形的顶角上，形成 3 个互成夹角的电偶极矩  $\boldsymbol{p}_1$ 、 $\boldsymbol{p}_2$  和  $\boldsymbol{p}_3$ ，如图 5-6 (a) 所示。此时正、负电荷中心重合，电偶极矩的矢量和等于零，即

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0 \quad (5.1.9)$$

当晶体受到  $x$  方向的压力（ $T_1 < 0$ ）作用时，晶体沿  $x$  方向将产生收缩，正、负离子的相对位置也随之发生变化，如图 5-6 (b) 所示。此时正、负电荷中心不再重合，电偶极矩在  $x$  方向的分量为

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_x > 0 \quad (5.1.10)$$

在  $y$ 、 $z$  方向的分量为

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_y = 0 \quad (5.1.11)$$

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_z = 0 \quad (5.1.12)$$

由上式可以看出，在  $x$  轴的正方向出现正电荷，在  $y$ 、 $z$  轴的方向则不出现电荷。

当晶体受到  $x$  方向的拉力（ $T_1 > 0$ ）作用时，其变化情况如图 5-6 (c) 所示。此时，电偶极矩的 3 个分量为

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_x < 0 \quad (5.1.13)$$

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_y = 0 \quad (5.1.14)$$

$$(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)_z = 0 \quad (5.1.15)$$

从上式可以看出，在  $x$  轴的正方向出现负电荷，在  $y$ 、 $z$  轴的方向则不出现电荷。由此可见，当晶体受到沿  $x$  方向（电轴）的应力  $T_1$  作用时，它在  $x$  方向产生正压电效应，而在  $y$ 、 $z$  方向则不产生压电效应。

在应力  $T_2$  作用下的情况与  $T_1$  相似。当  $T_2 > 0$  时，晶体的形变与图 5-6 (b) 所示相似；当  $T_2 < 0$  时，晶体的形变与图 5-6 (c) 所示相似。由此可见，当晶体受到沿  $y$  方向（机械轴）的应力  $T_2$  作用时，它在  $x$  方向产生正压电效应，而在  $y$ 、 $z$  方向则不产生压电效应。

在应力  $T_3$  作用下，因为晶体沿  $x$  方向和  $y$  方向所产生的正应变完全相同，所以正、负

电荷中心保持重合, 电偶极矩矢量和等于零。这就表明, 在沿  $z$  方向 (光轴) 的应力  $T_3$  作用下, 晶体不产生压电效应。

在切应力  $T_4$  作用下, 晶体除产生沿  $x$  平面的切应变外, 还要产生沿  $x$ 、 $y$  方向的正应变。而  $x$ 、 $y$  方向的正应变将使电偶极矩产生类似于图 5-6 (b), (c) 所示的变化。由此可见, 当晶体在切应力  $T_4$  的作用下, 它在  $x$  方向将产生正压电效应, 而在  $y$ 、 $z$  方向则不产生压电效应。

在切应力  $T_6$  的作用下, 晶体的  $z$  面将产生切变。电偶极矩的变化情况如图 5-6 (d) 所示, 由图可知

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)_x = 0 \quad (5.1.16)$$

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)_y > 0 \quad (5.1.17)$$

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)_z = 0 \quad (5.1.18)$$

由上式可以看出, 在  $y$  轴方向出现正电荷, 在  $x$ 、 $z$  轴方向则不出现电荷。这就表明, 在切应力  $T_6$  的作用下, 将在  $y$  方向产生正压电效应, 而在  $x$ 、 $z$  方向则不产生压电效应。

在切应力  $T_5$  的作用下, 晶体除产生  $y$  平面的切变外, 还将产生  $z$  平面的切变, 而电偶极矩则发生如图 5-6 (d) 所示的变化。由此可见, 当晶体在切应力  $T_5$  的作用下, 它在  $y$  方向将产生正压电效应, 而在  $x$ 、 $z$  方向则不产生压电效应。

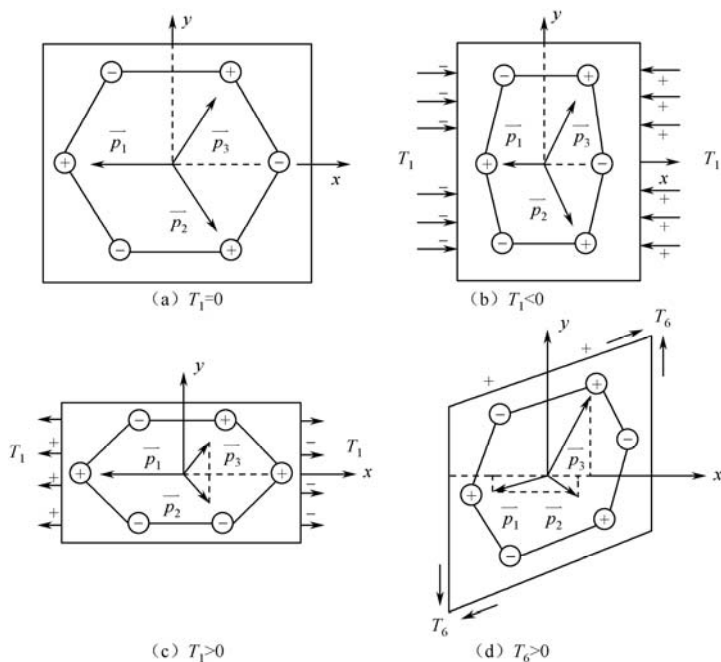


图 5-6 石英晶体的压电机理示意图

由上述讨论可知,当晶体受到机械应力的作用时,在它的表面上就产生束缚电荷,所产生电荷密度的大小与所施加的机械应力的成严格的线性关系,这种机械能转化为电能的过程称为正压电效应。通常测力传感器元件的石英晶体主要应用如下3种压电效应,即纵向效应、横向效应和剪切效应,如图5-7所示。

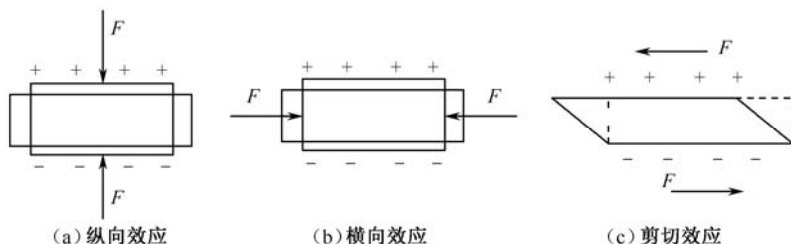


图5-7 力电转换元件常用压电效应示意图

#### 5.1.4 基于应力的压电效应及其表达式的建立

由于石英属于32点群,根据晶体宏观物理性质的诺埃曼原理可计算出石英的压电效应表达式为

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} \quad (5.1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix}$$

由式(5.1.19)可知石英晶体独立的压电系数只有两个,即

$$d_{11} = \pm 2.31 \times 10^{-12} \text{ C/N} = \pm 22.64 \text{ pC/kgf} \quad (5.1.20)$$

$$d_{12} = \pm 0.727 \times 10^{-12} \text{ C/N} = \pm 7.16 \text{ pC/kgf} \quad (5.1.21)$$

按照 IRE 标准规定,右旋石英晶体 $d_{11}$ 和 $d_{14}$ 的数值取(-)号,左旋石英晶体 $d_{11}$ 和 $d_{14}$

的数值取(+)号。

按力学上习惯规定,拉力为正,压力为负。对于右旋石英 $xy$ 切型,当沿 $x$ 方向对晶体施加拉力时,则 $x$ 轴的正端带负电荷,负端带正电荷,而左旋石英正好相反。只有正确判断出晶体受力后的极性及晶体输出电荷的正负,才能正确规定晶体装配方向。

综上所述,可以清楚看到,压电系数矩阵是正确选择力电转换元件、转换类型、转换效率及晶片几何切型的重要依据。因此,合理而灵活地运用压电系数矩阵是保证传感器正确设计的关键。

### 5.1.5 石英晶体的几何切型

石英晶体是各向异性体,在晶体坐标系中沿着不同的方向进行切割,就产生不同的几何切型,每一种晶片都以一定的几何切型为依据,它们的力-电转换类型、转换效率、压电系数、弹性系数、介电系数、温度特性等都不一样,这与传感器的设计、制造与使用有着密切的关系。所以在研究传感器设计与制造之前,先要弄清石英晶体几何切型的定义方法与符号。

#### 1. 几何切型的分类

根据石英晶体在 $XYZ$ 直角坐标系中的方位,可分为两大切族,如图5-8所示。

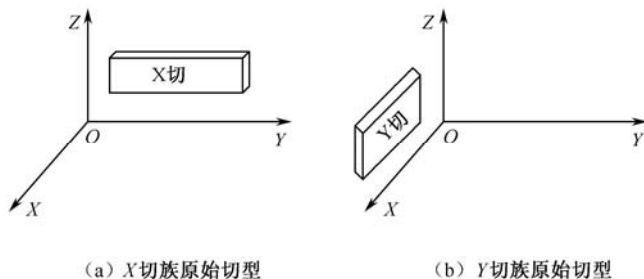


图5-8 石英晶体两大基本切族

##### 1) X切族

以原始厚度方向平行于晶体的 $X$ 轴,长度方向平行于 $Y$ 轴,而宽度方向平行于 $Z$ 轴旋转出来的各种不同的几何切族。

##### 2) Y切族

以原始厚度方向平行于晶体的 $Y$ 轴,长度方向平行于 $X$ 轴,宽度方向平行于 $Z$ 轴旋转出来的各种几何切族。

## 2. 几何切型的符号表示

在晶体坐标系中,晶片沿某个方向的切割称为切型。石英晶体的切型表示方法有两种。一种是 IRE 标准规定的符号表示法,另一种是石英晶体所特有的习惯符号表示法。

IRE 标准规定的切型符号用一组字母和角度来表示。用  $x$ 、 $y$ 、 $z$  中两个字母的先后排列来表示晶片的厚度和长度沿坐标轴的原始方位,用  $t$  (厚度)、 $l$  (长度)、 $w$  (宽度) 来表示旋转轴的方位,角度的正号表示逆时针旋转。石英晶体的习惯符号多数用两个英文大写字母表示,如 AT、BT、CT、DT、NT、FC 等。这两种符号有确定的对应关系。图 5-9 所示为常用切型在石英晶体中的方位。

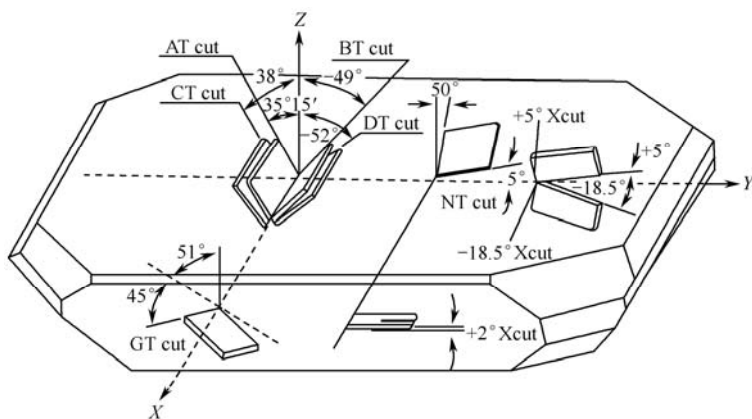


图 5-9 常用切型在石英晶体中的方位

### 1) $xy$ 切型

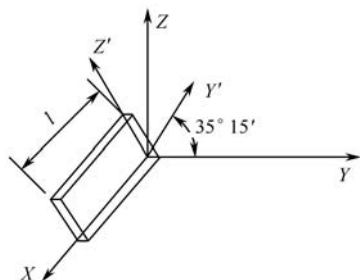
$xy$  切型 ( $x0^\circ$ ), 表示厚度方向与  $X$  轴平行, 晶片面与  $X$  轴垂直, 沿任何坐标轴都没有转动, 亦即  $X$  切族的原始切割, 简称  $X$  切, 如图 5-8 (a) 所示。

### 2) $yx$ 切型

$yx$  切型 ( $y0^\circ$ ), 表示厚度方向与  $Y$  轴平行, 晶片面与  $Y$  轴垂直, 沿任何坐标轴都没有转动, 亦即  $Y$  切族的原始切割, 简称  $Y$  切, 如图 5-8 (b) 所示。

### 3) $(yxl)+35^\circ 15'$ 切型和 $(yxtl) 35^\circ/-50^\circ$ 切型

$(yxl)+35^\circ 15'$  切型的第一个字母  $y$  表示晶片原始位置的厚度方向, 第二个字母  $x$  表示晶片原始位置的长度方向, 第三个字母  $l$  和角度  $35^\circ 15'$  表示晶片绕长度进行逆时针方向旋转, 如图 5-10 所示。

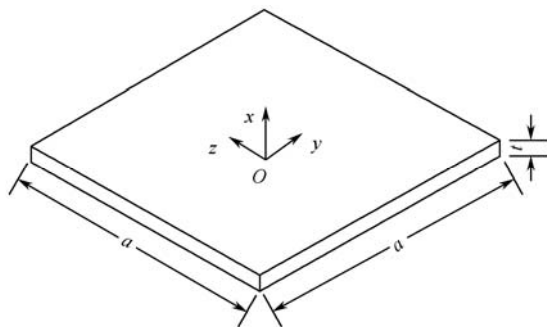
图 5-10  $(yxl) + 35^{\circ} 15'$  切型

## 5.2 石英晶片拉压效应数值计算

石英晶片的拉压效应是指对于特定切型的石英晶片在拉力、压力的作用下出现极化电荷的现象。

### 5.2.1 拉压应力计算

图 5-11 所示为一个由直线型均匀各向异性材料石英组成的晶片（切型为  $x0^{\circ}$ ），其中一个端面固定，另一个端面作用于集中压力  $P$ ，将笛卡儿坐标系原点选在固定端面中心， $x$  轴沿晶片的轴线方向。晶片厚度为  $t=1\text{ mm}$ ，长度  $a=21\text{ mm}$ 。

图 5-11  $x0^{\circ}$  石英晶片

根据弹性力学可知

$$\sigma_x = \frac{P}{S} = 2\,267.57P \quad (5.2.1)$$



$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.2.2)$$

将式 (5.2.1) 和式 (5.2.2) 代入弹性体平衡微分方程 (3.1.2), 由于忽略体积力, 可有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \frac{P}{S}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

可见, 式 (5.2.1) 和式 (5.2.2) 所给出的应力结果满足平衡微分条件。

根据 3.1.4 节内容可知, 式 (5.2.1) 和式 (5.2.2) 所给定的应力就是弹性体在压力载荷作用下的唯一解。

## 5.2.2 束缚电荷计算

在晶体坐标系下的压电应变常数为  $d_{11} = 2.31(\text{pC/N})$ ,  $d_{14} = -0.727(\text{pC/N})$ , 将式 (5.2.1) ~ (5.2.2) 代入压电方程式 (5.1.19), 可计算出电极化强度的分量为

$$P_x = d_{11}\sigma_x = 5\,238.10P \times 10^{-12}\text{C} \quad (5.2.3)$$

$$P_y = d_{21}\sigma_x = 0 \quad (5.2.4)$$

$$P_z = d_{31}\sigma_x = 0 \quad (5.2.5)$$

根据第 4 章中对于压电晶片极化的分析可以求得, 由压缩而产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\text{div}P = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = 0 \quad (5.2.6)$$

在垂直于  $x$  轴的晶体表面上产生的等效面束缚电荷密度  $\eta_{bx+}$  和  $\eta_{bx-}$  (下标“ $_{x+}$ ”和“ $_{x-}$ ”分别表示平面外法线指向  $x$  轴的正向与负向) 为

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \cdot \mathbf{e}_x = 5\,664.07P \times 10^{-12}\text{C} \quad (5.2.7)$$

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \cdot (-\mathbf{e}_x) = -5\,664.07P \times 10^{-12}\text{C} \quad (5.2.8)$$

$$\eta_{by+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_y \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (5.2.9)$$

$$\eta_{by-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_y \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (5.2.10)$$

$$\eta_{bz+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_z \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (5.2.11)$$

$$\eta_{bz-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_z \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (5.2.12)$$

根据计算结果可知, 此切型的石英晶片仅在  $x$  轴方向出现极化现象。可见, 此切型的石英晶片在  $y$ 、 $z$  轴方向没有极化现象。

### 5.2.3 束缚电场仿真

在晶体坐标系下的介电常数  $\varepsilon_{11} = 4.52$ ,  $\varepsilon_{33} = 4.62$ , 表示成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 0 & 0 \\ 0 & 4.52 & 0 \\ 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \quad (5.2.13)$$

为了形象地描述石英晶片扭转产生的极化电场, 下面采用有限元来求解电场的分布。根据有物质存在时静电场所遵循的原则, 由于压电片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场, 等效束缚电荷所产生的电场同样满足麦克斯韦方程。在实验所用的石英晶体内部, 电势满足的各向异性微分控制方程为

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho_b}{\varepsilon_0} \quad (5.2.14)$$

根据式 (5.2.13)、式 (5.2.14), 可以得到实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性方程为

$$4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + 4.62 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = 0 \quad (5.2.15)$$

在进行电场模拟时采用电荷边界, 根据第 4 章的电场分析, 电荷边界条件的形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \eta_b \quad (5.2.16)$$

取压力为 1 000 N, 根据电势方程式 (5.2.15) 和电荷边界条件式 (5.2.16), 可求得电场的模拟结果。电位云图通常能直观地反映电位在石英晶片内的变化情况, 云图颜色变化迅速的部位即是电位函数变化激烈的部位。针对这一特点, 采用三维模拟技术绘制拉压效应的电势分布云图, 如图 5-12 所示。极化电场强度矢量分布如图 5-13 所示, 箭头的尺寸正比于场强大小。从图中可以看出, 电场强度从上表面指向下表面, 这符合电荷在上表面为正, 在下表面为负的计算结果。

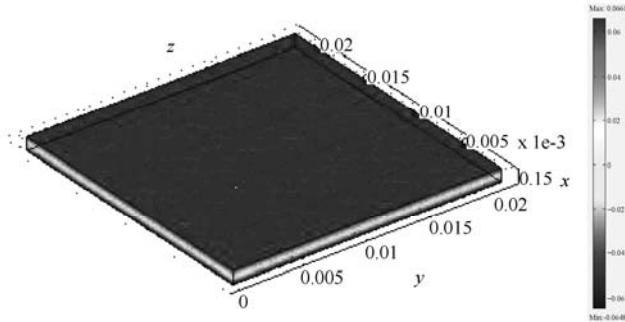


图 5-12 石英晶片拉压效应的电势分布云图

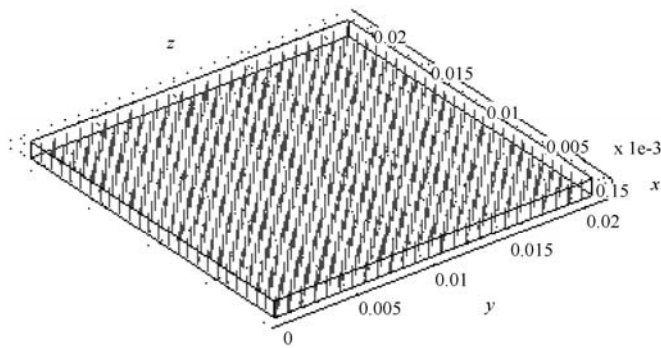


图 5-13 石英晶片拉压效应的极化电场强度矢量分布图

## 5.3 拉压效应的实验测定

### 5.3.1 拉压晶组组成

所谓“拉压晶组”，即为了检测拉压外力而采用同一切型晶片构成的晶片组合。它是传感器的转换元件中最基本的单元，研究它的构成是传感器设计和制造的重要环节。为了使传感器的结构简单，根据石英晶体的压电效应，通常采用同一切型的两片晶片构成一个单元晶组。

根据 5.2 节的分析可知，拉压效应主要存在于  $x0^\circ$  切型石英晶片中，采用压电系数  $d_{11}$ ，由如图 5-14 所示的晶组组成。

每个单元晶组采用完全相同的两片  $x0^\circ$  晶片“对装”，即在电路上为并联结构，把信号引出电极夹在两片中间。对装的原则有二：一是应使引出的信号为负电荷；二是应使两片

的  $Y$  轴相互错开一定角度。

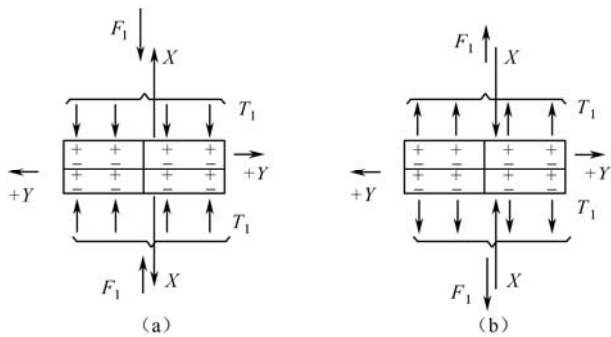


图 5-14 拉压晶组的构成

图 5-14 (a) 表示当晶体受压缩时右旋石英  $xy$  切型单元晶组（压缩型），图 5-14 (b) 则表示当晶体受拉伸时右旋石英  $xy$  切型单元晶组（拉伸型）。

单元晶组采用两片并联可使传感器构造简单，否则，若采用单片，一个晶片表面接地，引出极面必须有十分可靠的高电阻 ( $>10^{13}\Omega$ ) 绝缘，才能保证信号电荷不遗失，这势必造成相当大的困难，并使传感器的结构复杂化。另外，双片与单片比较起来，可使传感器电荷灵敏度提高一倍。

5.3.2 实验装置

实验在可调轴向加载实验台上进行，实验晶组采用如图 5-14 所示的布置，电荷放大器的型号为 FDH-2，数字电压表采用大连工学院生产的 SY2-III 电压表，实验测量原理图如 5-15 所示。

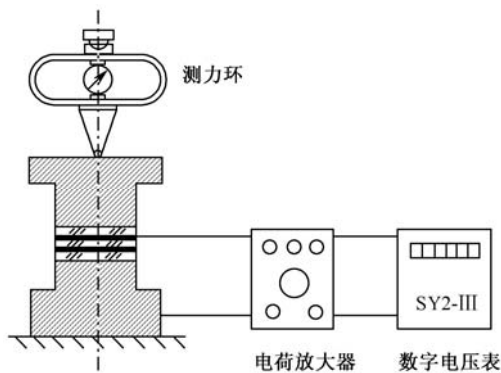


图 5-15 实验测量原理图

### 5.3.3 实验结果

实验测得的电压与压力关系如图 5-16 所示,从图中可以看出,电压与压力成非常好的线性关系。

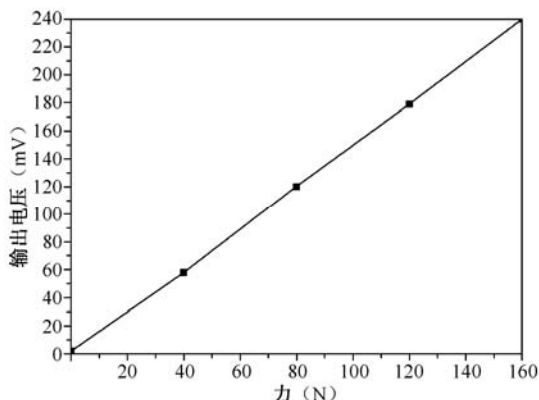


图 5-16 电压与压力的关系

## 5.4 典型压电力学量传感器

压电式力传感器的关键是选取合适的压电材料、变形方式、机械上串联或并联的晶片数、晶片的几何尺寸和合理的传力结构。显然,压电元件的变形方式以利用拉压效应的最简便。

### 5.4.1 单向压电式石英力传感器

单向传感器只能测量一个方向的外力,这里介绍的单向传感器用来测量与传感器承载面垂直的外力(法向力 $F_z$ ),即所谓“测力垫圈”。这种传感器采用 $x0^\circ$ 切型晶体,通过 $d_{11}$ 实现力电转换,晶体盒内只含一个 $x0^\circ$ 单元晶组。上盖为传力元件,其变形壁厚度为 $0.1\sim 0.5\text{ mm}$ ,通常由测力范围来决定。聚四氟套用来绝缘和定位,如图 5-17 所示。对基座内外底面相对其中心线的垂直度,上盖以及晶片、电极的上下底面的平行度与表面光洁度都有极严格的要求,否则会使横向灵敏度增加或使晶片因应力集中而过早破碎。为提高绝缘阻抗,传感器在装配前要经过多次净化(包括超声波清洗),然后在超净的工作环境中进行装配,加盖之后用电子束封焊。

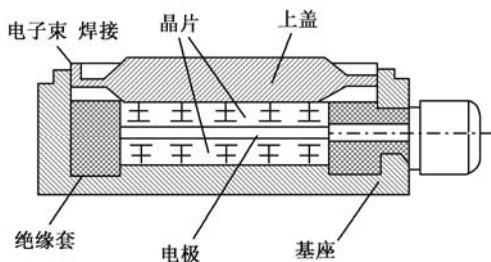
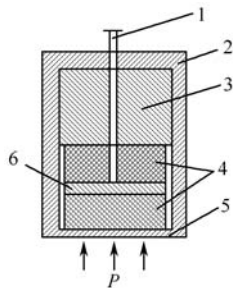


图 5-17 单向压电式石英力传感器

### 5.4.2 压电式压力传感器

根据使用要求不同，压电式压力传感器有各种不同的结构形式，但它们的基本原理相同。图 5-18 所示是压电式压力传感器的原理简图，它由引线 1、壳体 2、基座 3、压电晶片 4、受压膜片 5 及导电片 6 组成。



1—引线；2—壳体；3—基座；4—压电晶片；5—受压膜片；6—导电片

图 5-18 压电式压力传感器的原理简图

当受压膜片 5 受到压强  $P$  作用后，在压电晶片上产生电荷。在一个压电晶片上产生的电荷  $q$  为

$$q = d_{11}F = d_{11}SP$$

式中， $F$  是作用于压电片上的力； $d_{11}$  是压电系数； $P$  是压强； $S$  是膜片的有效面积。

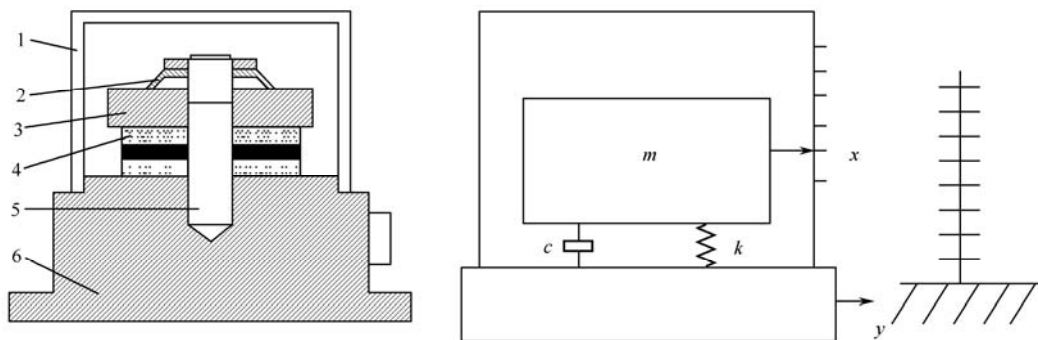
### 5.4.3 压电式加速度传感器

压电式加速度传感器也称为压电式加速度计，是以压电材料为转换元件，输出与加速度成正比的电荷或电压量的装置。由于它具有结构简单、工作可靠等一系列优点，目前已

成为冲击振动测量技术中使用广泛的一种传感器。世界各国作为量值传递标准的高频和中频振动基准的标准加速度传感器都是压电式的。由此可见,质量优良的压电式加速度传感器在精度、长时间稳定性等方面都有其独到之处。目前它的应用范围很广,约占目前所用的各种加速度传感器总数的80%。压电式加速度传感器量程大,频带宽,体积小,重量轻,安装简单,适用于各种恶劣环境。它广泛地应用于航空、航天、兵器、造船、纺织、农机、车辆、电气等各系统的振动、冲击测试、信号分析、机械动态实验、环境模拟实验、振动校准、模态分析、故障诊断、优化设计等。

压电式加速度传感器常见的结构形式有基于压电元件厚度变形的压缩式加速度传感器、基于压电元件剪切变形的剪切式及复合型加速度传感器3种。其中复合型加速度传感器泛指那些具有组合结构、差动原理、组合一体化或复合材料的压电传感器。

下面以一种压缩式加速度传感器为例,简单介绍压电式加速度传感器的工作原理。其结构如图5-19所示,它主要由压电元件4、质量块3、预压弹簧2、基座6、预压螺栓5及外壳1等组成。压电元件置于基座上,用弹簧将压电元件压紧。



1—外壳; 2—预压弹簧; 3—质量块; 4—压电元件; 5—预压螺栓; 6—基座

图 5-19 压电式加速度传感器工作原理图

压电式加速度传感器可用质量  $m$ 、弹簧  $k$ 、阻尼  $c$  的单自由度二阶力学系统来描述,它的运动规律可用下式表示。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -m\ddot{y} \quad (5.4.1)$$

式中,  $x$  是质量块相对于传感器壳体的位移;  $y$  是基座的绝对位移。

当传感器的振动加速度为  $a$  时,解其运动方程 (5.4.1),可求得它的幅频特性为

$$\left| \frac{x}{a} \right| = \frac{\left( \frac{1}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left[ 1 - \left( k \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (5.4.2)$$

式中,  $\omega$  是振动频率;  $\omega_n$  是传感器无阻尼固有频率;  $\xi$  是无因次阻尼比;  $a$  是被测振动加速度。

压电式加速度传感器的阻尼比  $\xi$  很小, 一般不大于 0.04, 可忽略不计。设计加速度传感器时, 要尽量提高它的无阻尼谐振频率。在  $\omega_n \gg \omega$  时, 式 (5.4.2) 可写成下式

$$x = \frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} \quad (5.4.3)$$

这说明质量块的相对位移  $x$  与物体振动加速度  $a$  成正比。

压电转换元件在惯性质量块  $m$  的惯性力作用下, 产生的电荷量为

$$Q = d_{ij} m \ddot{y} \quad (5.4.4)$$

对每个加速度传感器而言,  $d$ 、 $m$  均为常数。式 (5.4.4) 说明压电式加速度传感器输出的电荷量  $Q$  与物体振动加速度成正比。用适当的测试系统检测出电荷量  $Q$ , 就实现了对振动加速度的测量。相对于其他加速度传感器, 压电式加速度传感器具有高频响应特性好、体积小、刚度大等优点, 所以应用很广泛。



## 第6章

# 石英晶体弯曲效应研究

研究石英晶体正压电弯曲效应的目的是要推导出极化电荷与弯矩的关系式，分析基本切型在各种弯曲载荷作用下的极化电荷分布状态；研究石英晶体逆压电弯曲效应的目的是要推导出驱动电压和石英晶柱端部致动位移之间的关系式。本章对基本切型石英晶体弯曲效应进行数值计算，并设计实验来验证石英晶体的正压电弯曲效应，最后对影响压电活力的压电常数进行优化。

### 6.1 弯曲效应采用的石英晶柱结构

弯曲效应的研究中使用的是右旋 $\alpha$ 石英柱体，根据坐标选取的不同，有3种基本切型，由于每种切型都是由基本切型旋转得到的，因此本文选取这3种基本切型作为研究对象，即 $x0^\circ$ 晶柱（ $(yx)l0^\circ$ ）、 $y0^\circ$ 晶柱（ $(xy)l0^\circ$ ）、 $z0^\circ$ 晶柱（ $(xz)l0^\circ$ ），如图6-1所示。

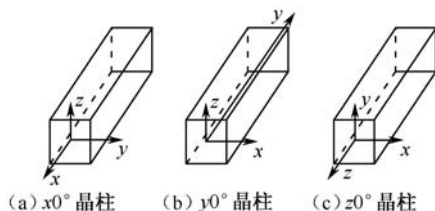


图 6-1 基本切型坐标系示意图

## 6.2 基本切型的纯弯曲效应的研究

### 6.2.1 弯曲效应应力和束缚电荷计算

以  $y0^\circ$  晶柱为例, 给出石英晶体正压电弯曲效应分析计算的详细过程, 并对理论分析加以实验验证, 这里所用晶体为右旋  $\alpha$  石英柱体, 晶体规格  $x \times y \times z = a(\text{mm}) \times b(\text{mm}) \times c(\text{mm})$ 。

#### 1. 弯曲对称面为 $xy$ 平面

当弯曲对称面为  $xy$  平面时, 载荷作用平面为  $Oxy$  平面, 如图 6-2 所示。

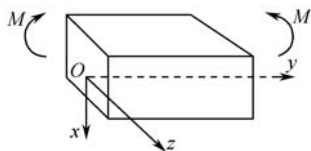


图 6-2  $y0^\circ$  晶柱的纯弯曲模式一坐标示意图

根据材料力学可得到在纯弯曲载荷作用下的应力分量为

$$\sigma_y = \frac{Mx}{I}, \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.2.1)$$

根据坐标缩并法可以得到:  $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z, \sigma_4 = \tau_{yz}, \sigma_5 = \tau_{xz}, \sigma_6 = \tau_{xy}$

将式 (6.2.1) 分别代入平衡微分方程式 (3.1.2)、静力边界条件式 (3.1.3) 和应变协调方程式 (3.1.14) 中, 可知所有方程恒成立。故根据“静力学唯一性定理 (kirchhoff-Neumann 唯一性定理)”可知: 在已知外力作用下, 如果弹性体处于平衡状态, 则在给定边界条件下弹性体各点的应力分量与应变分量是唯一的。

将式 (6.2.1) 代入压电方程式, 可得到极化强度, 极化强度分量为

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

式中  $d_{11} = -2.31 \times 10^{-12} \text{C/N}$ ,  $d_{14} = -0.727 \times 10^{-12} \text{C/N}$ 。

$$P_x = -\frac{d_{11}M}{I}x \quad (6.2.3)$$

$$P_y = 0 \quad (6.2.4)$$

$$P_z = 0 \quad (6.2.5)$$

根据第4章中对于压电晶片极化的分析,可以求得等效极化电荷密度为

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \Big|_{x=+\frac{a}{2}} = -\frac{d_{11}Ma}{2I} \quad (6.2.6)$$

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_x \Big|_{x=-\frac{a}{2}} = -\frac{d_{11}Ma}{2I} \quad (6.2.7)$$

$$\eta_{by+} = \eta_{by-} = 0 \quad (6.2.8)$$

$$\eta_{bz+} = \eta_{bz-} = 0 \quad (6.2.9)$$

其中“+”号指平面外法线指向  $x$ 、 $y$ 、 $z$  各轴的正向,“-”号指平面外法线指向  $x$ 、 $y$ 、 $z$  各轴的负向。

根据第4章中对于压电极化的分析,可以求得由弯曲产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\text{div} \mathbf{P} = -\left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = \frac{d_{11}M}{I} \quad (6.2.10)$$

因为  $d_{11} = -2.31 \times 10^{-12} \text{C/N}$ , 所以可得出以下结论:右旋石英晶体在这种弯矩作用下,在与  $x$  轴垂直的两个表面上感生出等量的正电荷,在其他表面无感生电荷,体内则感生出与晶体表面电荷等量的负电荷。体束缚电荷与面束缚电荷之和为零,符合电荷守恒定律。

## 2. 弯曲对称面为 $yz$ 平面

当弯曲对称面为  $xy$  平面时,载荷作用平面为  $Oxy$  平面,如图6-3所示。

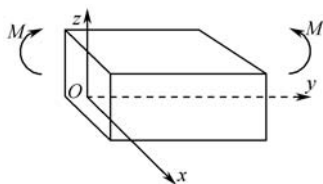


图6-3  $y0^\circ$  晶柱的纯弯曲模式二坐标示意图

参照“弯曲对称面为  $xy$  平面”计算过程,可以得到各个应力分量为

$$\sigma_y = -\frac{Mz}{I}, \quad \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.2.11)$$

代入式(6.2.2),求得极化强度  $\mathbf{P}$  的分量为

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{d_{11}M}{I}z \\
 P_y &= 0 \\
 P_z &= 0
 \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

根据第 4 章中对于压电极化的分析, 可以求得由弯曲产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\text{div}\mathbf{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{6.2.13}$$

面束缚电荷密度  $\eta_b$  为

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{d_{11}M}{I}z \tag{6.2.14}$$

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_x \Big|_{x=-\frac{a}{2}} = -\frac{d_{11}M}{I}z \tag{6.2.15}$$

$$\eta_{by+} = \eta_{by-} = 0 \tag{6.2.16}$$

$$\eta_{bz+} = \eta_{bz-} = 0 \tag{6.2.17}$$

由以上计算可得出以下结论: 右旋石英晶体在这种弯矩作用下感生出如图 6-4 所示的表面束缚电荷, 而晶体内部无感生电荷。

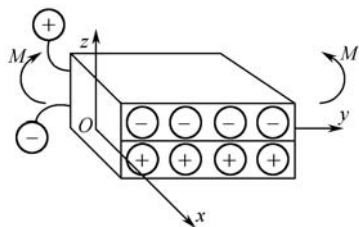


图 6-4 晶体表面感生电荷分布示意图

## 6.2.2 极化电场模拟

由于弯曲对称面为  $xy$  平面时, 电荷分布在上下表面, 相对比较简单, 故极化电场模拟只分析“弯曲对称面为  $yz$  平面”的情况。

在晶体坐标系下的介电常数为  $\varepsilon_{11} = 4.52$ ,  $\varepsilon_{33} = 4.62$ , 表示成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 0 & 0 \\ 0 & 4.52 & 0 \\ 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \tag{6.2.18}$$

为了形象地描述石英晶片扭转产生的极化电场,下面采用有限元来求解电场的分布。根据有物质存在时静电场所遵循的原则,由于压电片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场,等效束缚电荷所产生的电场同样满足麦克斯韦方程。在实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性微分控制方程为

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho_b}{\varepsilon_0} \quad (6.2.19)$$

根据式(6.2.13)、式(6.2.18)和式(6.2.19),在晶体坐标系下,实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性方程为

$$4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + 4.62 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.2.20)$$

在进行电场模拟时采用电荷边界,根据第4章的电场分析,电荷边界条件的形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \eta_b \quad (6.2.21)$$

将式(6.2.21)对压电石英晶柱展开,可得到各个表面处的束缚电荷密度。

(1) 截面  $x = a/2$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{\mathbf{e}_x, 0, 0\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \frac{d_{11}M}{l} z \quad (6.2.22)$$

(2) 截面  $x = -a/2$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{-\mathbf{e}_x, 0, 0\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\frac{d_{11}M}{l} z \quad (6.2.23)$$

(3) 截面  $y = b$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{0, \mathbf{e}_y, 0\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{by+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2.24)$$

(4) 截面  $y = 0$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{0, -\mathbf{e}_y, 0\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{by-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2.25)$$

(5) 截面  $z = c/2$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{0, 0, \mathbf{e}_z\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{bz+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2.26)$$

(6) 截面  $z = -c/2$  处,此时,外法线为  $\mathbf{n} = \{0, 0, -\mathbf{e}_z\}$ ,极化面电荷密度为

$$\eta_{bz-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2.27)$$

取弯矩为单位扭矩  $1\text{N}\cdot\text{m}$ ,根据电势方程式(6.2.20)和等效极化电荷面密度式(6.2.22)~式(6.2.27),通过有限元可求得电场的模拟结果。由于电位云图通常能直观地反映电位在石英晶体内的变化情况,云图颜色变化迅速的部位,即是电位函数变化激烈的部位。因此,本文针对这一特点,采用三维模拟技术,绘制了弯曲效应的电势分布云图,如图6-5所示。极化电场强度矢量分布如图6-6所示,箭头的尺寸正比于场强大小。从图中可以看出,电场强度从垂直于  $x$  轴晶体表面的一侧指向另一侧,这符合电荷在垂直于  $x$  轴晶体上表面为

正，而在下表面为负的计算结果。

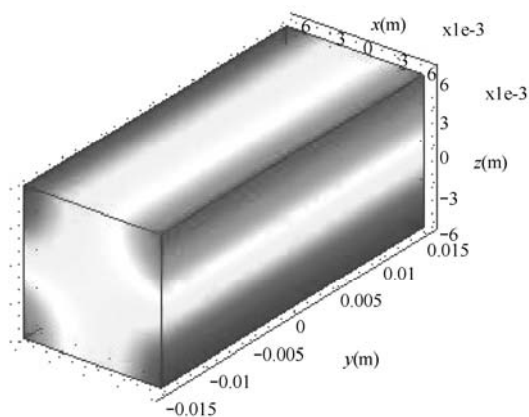


图 6-5 石英晶体弯曲效应的电势分布云图

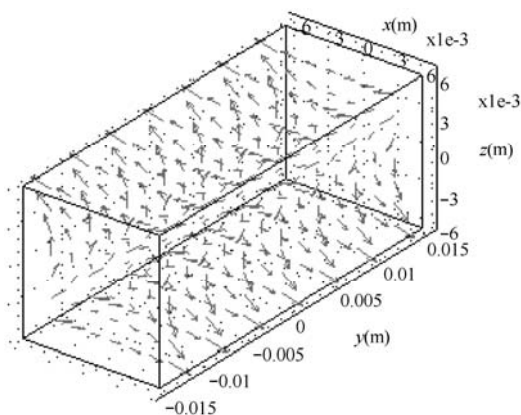


图 6-6 石英晶体弯曲效应的极化电场强度矢量分布图

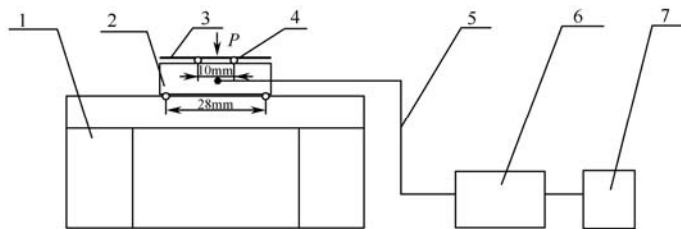
### 6.2.3 弯曲效应实验

依据上述理论，对  $y0^\circ$  型右旋石英晶柱进行电极布置，用实验验证晶体在算例所示弯矩作用下其表面感生电荷的分布情况。

#### 1. 实验设备

根据弹性力学及压电学理论，对石英晶体施加弯矩作用，其内部将产生应力场，使石英晶体内部晶胞正负电荷中心不再重合，从而引发极化，极化的结果使石英晶体表面产生

面束缚电荷，内部可能产生体束缚电荷。布置的检测电极将检测到等量的面束缚电荷，采用纯弯曲实验装置如图 6-7 所示。



1—实验台；2—石英晶体；3—加载板；4—支撑柱；5—引线；6—YE5850 型电荷放大器；7—数字万用表

图 6-7 石英晶体弯曲效应实验装置图

实验中采用的  $y0^\circ$  型右旋石英晶柱规格为：12 mm×12 mm×30 mm。电极 0.02 mm 厚，一面带绝缘层的铜箔，坐标系和实验电极布置及电极规格如图 6-8 所示。

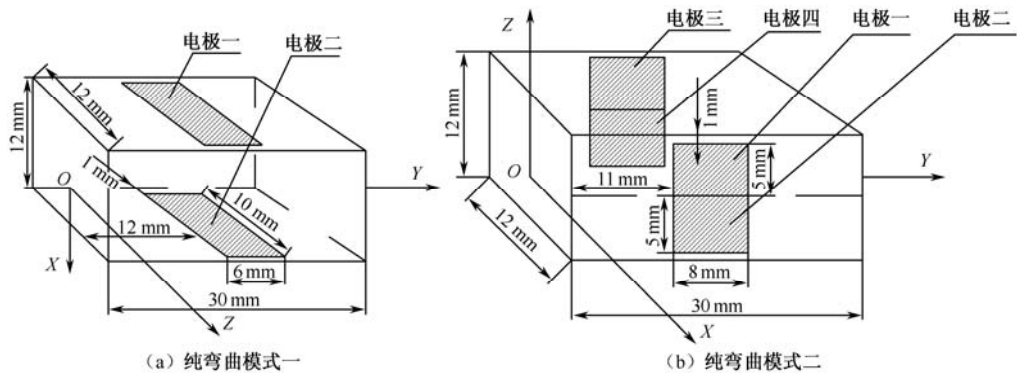


图 6-8 坐标系和实验电极布置及电极规格

按如图 6-7 所示装置加载，即在石英晶体  $y$  轴方向 10~20 mm 之间产生纯弯曲，根据材料力学可绘制出弯矩图，如图 6-9 所示。

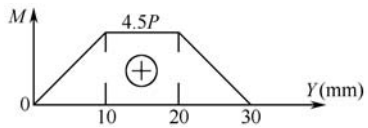


图 6-9 弯矩图

2. 实验结果及分析

电极采用具有绝缘层厚度为 0.02 mm 的铜箔，用双面胶黏附在晶体表面。将从检测电极上采集到的电荷输入电荷放大器，经放大后输入数字表读数。考虑到外界电磁干扰，实

验台用铜箔屏蔽。

1) 弯曲模式一

将弯曲模式一的实验结果列于表 6-1 和表 6-2 中。

表 6-1  $\gamma 0^\circ$  晶体在弯曲模式一状态下的实验数据（电极 1）

弯矩 (N·mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.54	0.53
4.410	0.9	1.2	1.0	1.0	1.1	1.04	1.06
6.620	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.54	1.59
8.820	2.2	2.0	1.9	2.1	2.0	2.04	2.12

表 6-2  $\gamma 0^\circ$  晶体在弯曲模式一状态下的实验数据（电极 2）

弯矩 (N·mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	0.6	0.5	0.6	0.5	0.56	0.53	0.53
4.410	1.3	1.1	1.2	1.0	1.0	1.12	1.06
6.620	1.6	1.6	1.7	1.7	1.8	1.64	1.59
8.820	2.1	2.2	2.1	2.2	2.2	2.16	2.12

注：弯矩单位为 N·mm，电量单位为 pC。

根据上述数据，绘制如图 6-10 所示的感生电荷量与弯矩的关系曲线图，由图可见，弯矩与极化电荷量呈较好的线性分布。

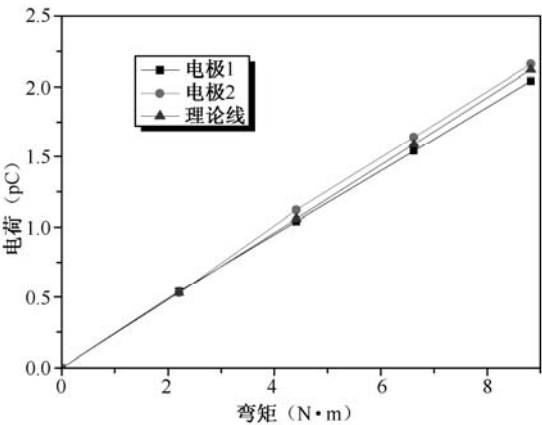


图 6-10 弯曲模式一状态下的弯矩和感生电荷量关系曲线



2) 弯曲模式二

将弯曲模式二的实验结果列于表 6-3～表 6-6 中。

表 6-3  $y0^\circ$  晶体在弯曲模式二状态下的实验数据（电极 1）

弯矩 (N · mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	-0.4	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	-0.38	-0.59
4.410	-0.7	-0.8	-0.8	-0.8	-0.7	-0.76	-1.18
6.620	-1.5	-1.6	-1.4	-1.4	1.4	-1.48	-1.77
8.820	-2.1	-2.2	-2.0	-2.2	-2.0	-2.10	-2.36

表 6-4  $y0^\circ$  晶体在弯曲模式二状态下的实验数据（电极 2）

弯矩 (N · mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.36	0.59
4.410	0.8	0.9	0.7	0.9	0.9	0.84	1.18
6.620	1.5	1.4	1.5	1.5	1.4	1.46	1.77
8.820	2.1	2.0	2.1	2.0	2.0	2.04	2.36

表 6-5  $y0^\circ$  晶体在弯曲模式二状态下的实验数据（电极 3）

弯矩 (N · mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	0.4	0.5	0.5	0.5	0.4	0.46	0.59
4.410	1.1	1.3	1.2	1.1	1.1	1.16	1.18
6.620	1.8	1.7	1.8	1.6	1.9	1.76	1.77
8.820	2.4	2.3	2.4	2.4	2.3	2.36	2.36

表 6-6  $y0^\circ$  晶体在弯曲模式二状态下的实验数据（电极 4）

弯矩 (N · mm)	电荷 (pC)					平均值 (pC)	理论值 (pC)
0	0	0	0	0	0	0	0
2.205	-0.6	-0.5	-0.5	-0.6	-0.6	-0.56	-0.59
4.410	-1.1	-1.1	-1.0	-1.1	-1.2	-1.10	-1.18
6.620	-1.8	-1.7	-1.7	-1.6	-1.8	-1.72	-1.77
8.820	-2.3	-2.4	-2.3	-2.4	-2.4	-2.36	-2.36

注：弯矩单位为 N · mm，电量单位为 pC。

根据上述数据, 绘制如图 6-11 所示的感生电荷量与弯矩的关系曲线图, 由图可见, 弯矩与极化电荷量呈线性分布。

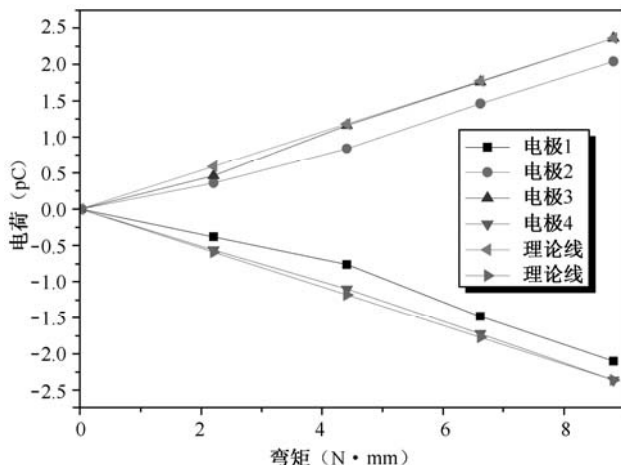


图 6-11 弯曲模式二状态下的弯矩和感生电荷量关系曲线

## 6.2.4 弯曲效应中晶体切型优化

从上述石英晶体压电弯曲效应的理论分析可以看出, 当  $y0^\circ$  晶体规格一定时, 晶体在外加弯矩作用下产生的感生电量大小只与压电系数  $d_{12}$  ( $d_{12} = -d_{11}$ ) 有关, 晶体在外加电场作用下产生的端部位移大小也只与压电系数  $d_{12}$  有关。因此当  $y0^\circ$  石英晶体规格一定时, 对压电系数  $d_{12}$  进行数值优化, 将会显著提高石英晶体压电弯曲效应的压电活力。而压电系数是随切角的变化而变化的, 这就要知道压电系数随切角变化的关系, 即新坐标系中的压电常数矩阵。本节对石英晶体进行单转角的切型优化, 即晶体坐标系只绕某一轴旋转时的优化。这里规定晶体坐标系逆时针旋转为正。

由于电极化强度为一阶张量 (矢量), 应力为二阶张量, 压电模量为三阶张量, 因此对它们的坐标变换涉及张量的变换。

根据“附录 C 压电系数的坐标变换”可知, 在坐标系旋转时, 压电系数的坐标变换公式为

$$d' = AdM^{-1} = AdN^T \quad (6.2.28)$$

式中,  $A$  是正交变换矩阵。

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6.2.29)$$

应变张量的变换矩阵  $N$  为

$$N = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{12}a_{13} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{22}a_{23} & a_{21}a_{23} & a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & a_{32}a_{33} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{32} \\ 2a_{21}a_{31} & 2a_{22}a_{32} & 2a_{23}a_{33} & (a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23}) & (a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21}) & (a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\ 2a_{31}a_{11} & 2a_{32}a_{12} & 2a_{33}a_{13} & (a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33}) & (a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31}) & (a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32}) \\ 2a_{11}a_{21} & 2a_{12}a_{22} & 2a_{13}a_{23} & (a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13}) & (a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11}) & (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) \end{pmatrix} \quad (6.2.30)$$

设晶体的原坐标系为  $Oxyz$ ，绕  $x$  轴旋转  $\theta$  角后的坐标系为  $Oxy'z'$ ，则变换矩阵为

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (6.2.31)$$

式中， $c = \cos \theta$ ， $s = \sin \theta$ 。将其代入式 (6.2.28)，可以得到压电系数  $d'_{12} = d_{12}c^2 + d_{14}sc$ ，根据该式绘制出压电常数  $d_{12}$  随角度  $\theta$  变化的曲线，如图 6-12 (a) 所示。

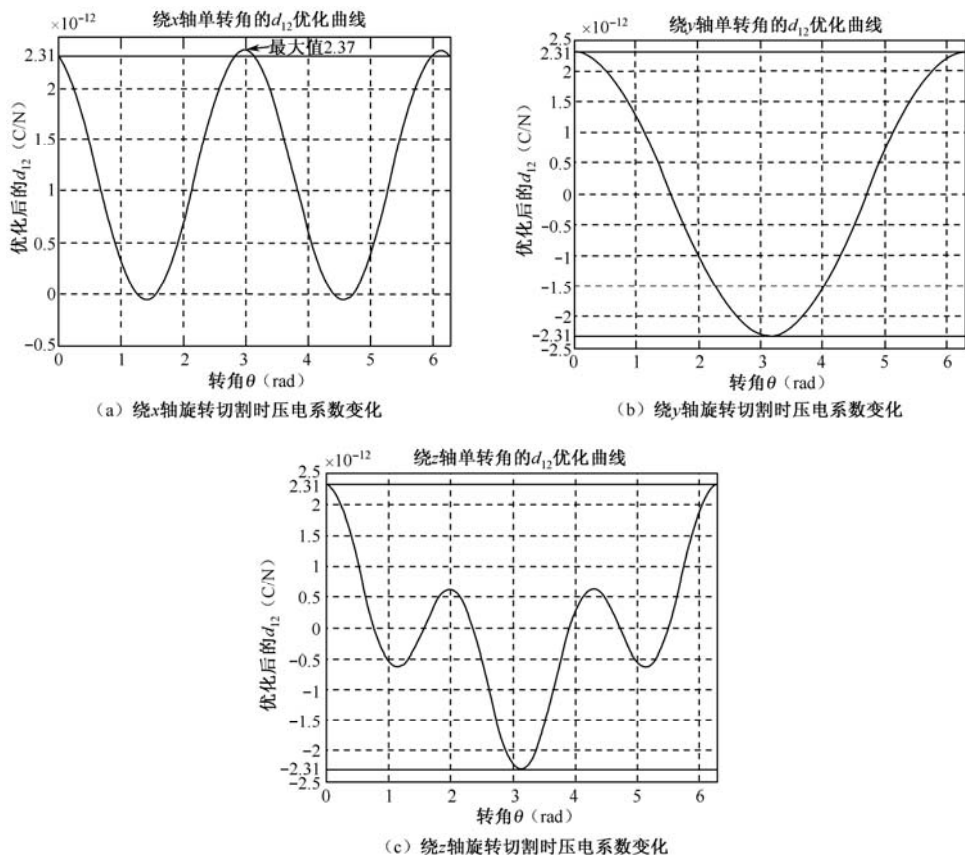
同理，可分别求出绕  $y$  轴和  $z$  轴旋转  $\theta$  角后的  $d_{12}$  为： $d'_{12} = cd_{12}$ ，如图 6-12 (b) 所示； $d'_{12} = d_{11}s^2c + d_{12}c^3$ ，如图 6-12 (c) 所示。

同时绕  $x$  轴旋转  $\theta$  角，绕  $y$  轴旋转  $\varphi$  角，绕  $z$  轴旋转  $\alpha$  角时的坐标变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi & \cos \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi & \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \alpha & \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi & \cos \alpha \sin \theta - \cos \theta \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (6.2.32)$$

将式 (6.2.32) 代入式 (6.2.28) 中，可以计算得到压电系数  $d'_{12}$  为

$$\begin{aligned} d'_{12} = & -2.31 \times 10^{-12} \cos \alpha \cos \varphi^3 \sin \alpha^2 - 0.727 \times 10^{-12} \cos \varphi \sin \alpha (\cos \alpha \sin \theta \\ & - \cos \theta \sin \alpha \sin \varphi) (\cos \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi) \\ & - 0.727 \times 10^{-12} \cos \alpha \cos \varphi (\cos \alpha \sin \theta - \cos \theta \sin \alpha \sin \varphi) \\ & (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi) - 4.62 \times 10^{-12} \cos \varphi \sin \alpha (\cos \theta \sin \alpha \\ & - \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi) (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi) + 2.31 \times 10^{-12} \cos \alpha \cos \varphi \\ & (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi)^2 \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

图 6-12 压电常数  $d_{12}$  与角度  $\theta$  的关系

应用多变量优化方法使目标函数(式(6.2.33))最大,经过计算,可得到优化后的几何切割角度为  $(8.74, 0, 0)$ , 优化后的压电系数为  $d_{12} = 2.37 \times 10^{-12}$ 。优化角度的几何意义是:从晶体坐标系出发,绕晶体  $x$  轴逆时针旋转  $8.74^\circ$ , 形成  $Oxy'z'$  坐标系即可。

## 6.3 基本切型的悬臂梁弯曲效应研究

考虑到各向异性石英矩形截面简支梁,该石英晶柱尺寸为  $L=60\text{ mm}$ ,  $b=20\text{ mm}$ ,  $h=10\text{ mm}$ , 承受载荷  $P$  作用,如图 6-13 所示。图中  $Ox'y'z'$  为晶体坐标系,由于石英晶体的物性参数都是在晶体坐标系中给定的,为了计算方便,需要将物性参数按照坐标变换法从

晶体坐标系变换到计算坐标系  $Oxyz$  中。

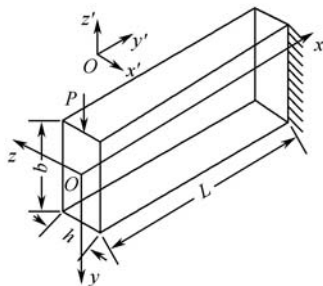


图 6-13 悬臂梁弯曲受力分析

### 6.3.1 弯曲应力计算

由于弹性对称面垂直于计算坐标系的  $z$  轴，因此该悬臂梁弯曲问题可以简化为平面应力问题。根据各向异性弹性力学理论，平面应力函数应该满足微分方程式

$$s_{22} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (6.3.1)$$

和边界条件

$$\left. \begin{aligned} \iint \tau_{xz} dydz &= 0, \iint \sigma_x y dydz = -Px \\ \iint \tau_{xy} dydz &= -P, \iint \sigma_x z dydz = 0 \\ \iint \sigma_x dydz &= 0, \iint (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dydz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3.2)$$

式中， $s_{ij}$  是弹性顺度系数（ $i, j=1, 2, \dots, 6$ ）。

根据材料力学中各向同性悬臂梁弯曲情况，同时考虑到石英晶体各向异性，设定应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{I} xy + s_{16} f_1''(y), \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{-P}{2I} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) + s_{16} f_2''(y) \end{aligned} \right\} \quad (6.3.3)$$

式中， $I$  是截面对  $z$  轴的惯性矩； $f_1''(y)$  和  $f_2''(y)$  是两个待定的函数。

将式（6.3.3）代入式（6.3.2），可以得到  $f_1''(y)$  和  $f_2''(y)$ ，则可以得到平面应力函数为

$$F(x, y) = \frac{P}{I} \left[ -\frac{xy^3}{6} + \frac{b^2 xy}{8} + \frac{s_{16}}{24s_{11}} (b^2 y^2 - 2y^4) \right] \quad (6.3.4)$$

根据应力函数的定义,可以得到各个应力分量为

$$\sigma_x = -\frac{P}{I}xy + \frac{P}{I}\frac{s_{16}}{s_{11}}\left(\frac{b^2}{12} - y^2\right) \quad (6.3.5)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.3.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) \quad (6.3.7)$$

### 6.3.2 束缚电荷计算

在晶体坐标系下的压电应变常数  $d_{11}=2.31$  (pC/N),  $d_{14}=-0.727$  (pC/N)。当坐标系旋转时,在当前计算坐标系下,压电应变系数张量也要进行坐标变换,根据压电应变系数的变换关系

$$[d'] = [A][d][N'] \quad (6.3.8)$$

可求得在当前坐标系下的压电方程为

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.727 \times 10^{-12} & 4.62 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.31 \times 10^{-12} & 0 & -2.31 \times 10^{-12} & 0 & 0 & -0.727 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

将式 (6.3.5) ~ 式 (6.3.7) 代入压电方程式 (6.3.9) 可得到极化强度,极化强度分量为

$$P_x = -\frac{d_{11}M}{I}x \quad (6.3.10)$$

$$P_y = 0 \quad (6.3.11)$$

$$P_z = (-1.382 \ 41 \times 10^{-9} - 0.000 \ 35xy - 0.000 \ 07y^2)P \quad (6.3.12)$$

根据第 4 章中对于压电极化的分析,可以求得由弯曲产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\text{div} \mathbf{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = 0 \quad (6.3.13)$$

面束缚电荷密度  $\eta_b$  为

$$\eta_{bx+} = d_{11}\sigma_x + d_{16}\tau_{xy} = 0 \quad (6.3.14)$$

$$\eta_{by+} = d_{21}\sigma_x + d_{26}\tau_{xy} = 0 \quad (6.3.15)$$

$$\eta_{bz+} = d_{31}\sigma_x + d_{36}\tau_{xy} = (-1.382 \ 41 \times 10^{-9} - 0.000 \ 35xy - 0.000 \ 07y^2)P \quad (6.3.16)$$

### 6.3.3 极化电场模拟

根据坐标变换,在当前计算坐标系下的介电常数  $\varepsilon_{11} = 4.52$ ,  $\varepsilon_{33} = 4.62$ , 表示成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 0 & 0 \\ 0 & 4.62 & 0 \\ 0 & 0 & 4.52 \end{pmatrix} \quad (6.3.17)$$

为了形象地描述石英晶片扭转产生的极化电场,下面采用有限元来求解电场的分布。根据有物质存在时静电场所遵循的原则,由于压电片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场,等效束缚电荷所产生的电场同样满足麦克斯韦方程。在实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性微分控制方程为

$$4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + 4.62 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.3.18)$$

在进行电场模拟时采用电荷边界,根据第4章的电场分析,电荷边界条件的形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \eta_b \quad (6.3.19)$$

取集中力为 1N,根据电势方程式(6.3.18)和等效极化电荷面密度,通过有限元可求得电场的模拟结果。由于电位云图通常能直观地反映电位在石英晶体内的变化情况,云图颜色变化迅速的部位,即是电位函数变化激烈的部位。因此,本文针对这一特点,采用三维模拟技术绘制了弯曲效应的电势分布云图,如图6-14所示。极化电场强度矢量分布如图6-15所示,箭头的尺寸正比于场强大小。在  $z = 0.005 \text{ mm}$  表面上,上半部分电势大于下半部分电势;而在  $z = -0.005 \text{ mm}$  表面上,下半部分电势大于上半部分电势,电势呈现出一种反对称分布状态。

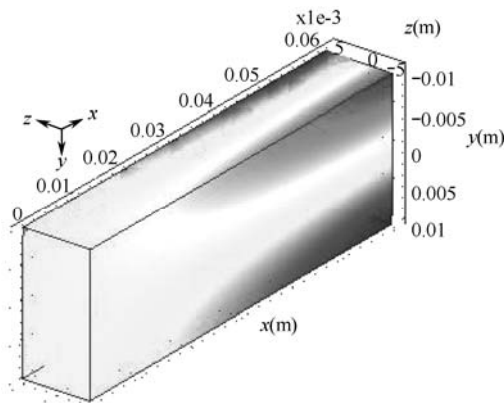


图 6-14 石英晶体弯曲效应的电势分布云图

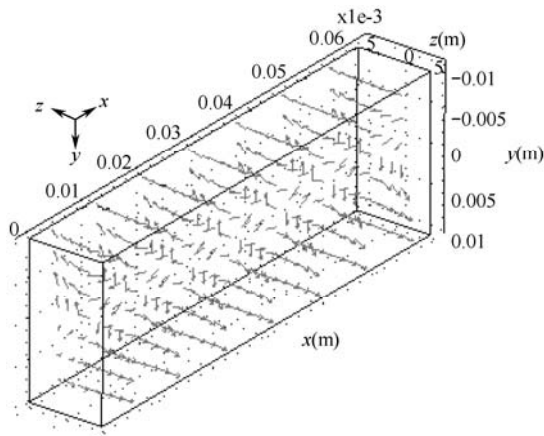


图 6-15 石英晶体弯曲效应的极化电场强度矢量分布图

### 6.3.4 实验与结果分析

#### 1. 束缚电荷分布

为了有效地布置检测电极，应该考虑束缚电荷在晶体表面上的分布情况， $z$  表面的电荷分布如图 6-16 所示，可以看出电荷分布不均匀。

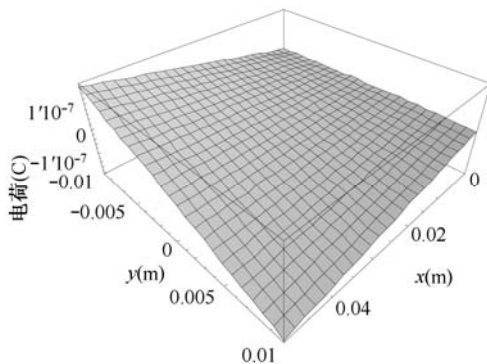


图 6-16 在  $z=0.005\text{mm}$  表面上的电荷密度分布

考虑到电场和电势的分布情况，为了检测出弯曲效应，必须采用分割电极法布置检测电极，如图 6-17 所示为布置 4 片检测电极，电极尺寸为  $9\text{mm} \times 50\text{mm}$ 。



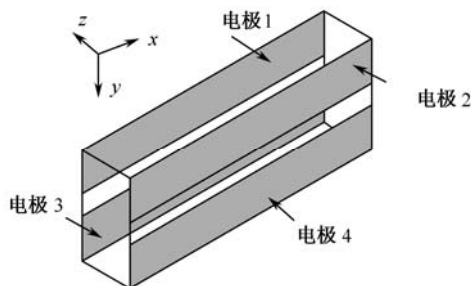


图 6-17 检测电极布置

通过积分式 (6.3.16)，可以得到每个检测电极的理论电荷量为

$$Q_1 = -Q_2 = \iint_{A_1} \eta_{bz+} dx dy = 19.692P(\text{pC}) \quad (6.3.20)$$

$$-Q_3 = Q_4 = \iint_{A_2} \eta_{bz+} dx dy = -23.187P(\text{pC}) \quad (6.3.21)$$

## 2. 实验设备

实验设备示意图如图 6-18 所示，每个检测电极连接一个电荷放大器，将电荷信号放大为电压信号，并由数字电压表读出。

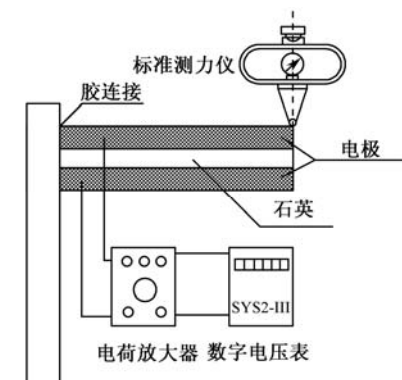


图 6-18 实验设备示意图

## 3. 实验结果与分析

通过实验可以得到极化电荷与外载荷的关系曲线，如图 6-19 所示。由图可见，极化电荷与外载荷呈较好的线性关系。

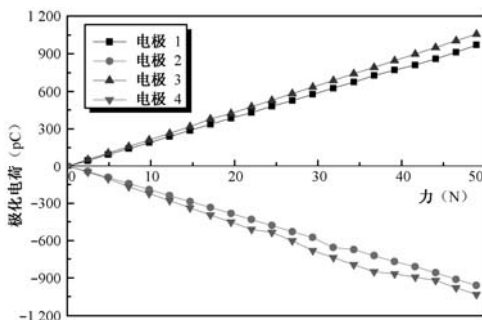


图 6-19 极化电荷与外载荷关系曲线

## 6.4 基本切型的简支梁弯曲效应研究

考虑到各向异性石英矩形截面简支梁, 该石英晶柱尺寸为  $L=60\text{ mm}$ ,  $b=20\text{ mm}$ ,  $h=10\text{ mm}$ , 承受均布载荷  $q$  作用, 如图 6-20 所示。图中  $Ox'y'z'$  为晶体坐标系, 由于石英晶体的物性参数都是在晶体坐标系中给定的, 为了计算方便, 需要将物性参数按照坐标变换法则从晶体坐标系变换到计算坐标系  $Oxyz$  中。

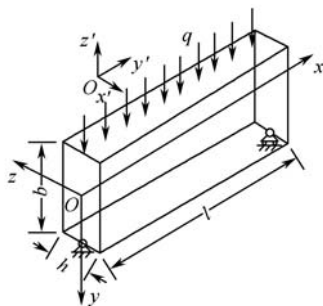


图 6-20 受均布载荷作用的压电石英晶体

### 6.4.1 弯曲应力计算

由于石英晶体的弹性对称面就是计算坐标系的  $Oxy$  平面, 故可将其变为广义平面应力问题。根据各向异性弹性力学, 平面应力函数  $F(x, y)$  满足微分方程

$$s_{22} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (6.4.1)$$

考虑到材料力学计算结果, 选取应力函数为五次多项式, 形式为

$$F(x, y) = \frac{q}{12I}(l^2 - x^2)y^3 + \frac{q}{h}\left[-\frac{s_{16}}{s_{11}}\frac{x}{b}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{b^2}\right) - 2\left(\frac{s_{16}^2}{s_{11}^2} - \frac{2s_{12} + s_{16}}{4s_{11}}\right)\left(\frac{y^3}{10b} - \frac{y^5}{5b^3}\right) - \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2y}{4b}\right] \quad (6.4.2)$$

利用平面应力函数的定义, 可求得各应力分量为

$$\sigma_x = \frac{q}{12I}(l^2 - x^2)y + \frac{q}{h}\left[-\frac{s_{16}}{s_{11}}\frac{x}{b}\left(1 - 12\frac{y^2}{b^2}\right) - 2\left(\frac{s_{16}^2}{s_{11}^2} - \frac{2s_{12} + s_{16}}{4s_{11}}\right)\left(\frac{3y}{5b} - \frac{4y^3}{b^3}\right)\right] \quad (6.4.3)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h}\left(-3 + 3\frac{y}{b} - 4\frac{y^3}{b^3}\right) \quad (6.4.4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I}x\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) + \frac{q}{h}\frac{s_{16}}{s_{11}}\left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}\right) \quad (6.4.5)$$

将石英晶体的尺寸参数代入到式 (6.4.3) ~ 式 (6.4.5), 可以得到弯曲应力函数为

$$F(x, y) = q(-25x^3 + 419\,243y^3(0.107\,136 + y^2) + x^2(3\,750y - 1.25 \times 10^7 y^3) + x(-880.971y^2 + 4.404\,86 \times 10^6 y^4)) \quad (6.4.6)$$

根据平面应力函数的定义, 由式 (6.4.6) 可以得到各个应力分量为

$$\sigma_x = 7.5 \times 10^7 q(0.003\,6 - x^2)y + 100q(-17.619\,4x(1 - 30\,000y^2) - 0.167\,697(30y - 500\,000y^3)) \quad (6.4.7)$$

$$\sigma_y = -2.5 \times 10^7 qy^3 + 100q(-1.5x + 75y) \quad (6.4.8)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.4.9)$$

$$\tau_{xy} = -7.5 \times 10^7 qxy^2 + 100q(75x - 17.619\,4(y - 10\,000y^3)) \quad (6.4.10)$$

## 6.4.2 束缚电荷计算

在晶体坐标系下的压电应变常数  $d_{11} = 2.31(\text{pC/N})$ ,  $d_{14} = -0.727(\text{pC/N})$ 。当坐标系旋转时, 在当前计算坐标系下, 压电应变系数张量也要进行坐标变换, 根据压电应变系数的变换关系

$$[d'] = [A][d][N'] \quad (6.4.11)$$

可求得在当前坐标系下的压电方程为

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.727 \times 10^{-12} & 4.62 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.31 \times 10^{-12} & 0 & -2.31 \times 10^{-12} & 0 & 0 & -0.727 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.4.12)$$

将式 (6.3.5) ~ 式 (6.3.7) 代入压电方程式 (6.4.12), 可得到极化强度, 极化强度分量为

$$P_x = 0 \quad (6.4.13)$$

$$P_y = 0 \quad (6.4.14)$$

$$\begin{aligned} P_z &= 2.31 \times 10^{-12} \sigma_x - 0.727 \times 10^{-12} \tau_{xy} \\ &= q(-0.000\ 173\ 25x^2y + x(-9.522\ 59 \times 10^{-9} + 0.000\ 176\ 628y^2) \\ &\quad + 6.559\ 73 \times 10^{-6} y(0.098\ 098\ 2 + y^2)) \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

根据第 4 章中对于压电极化的分析, 可以求得由弯曲产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.4.16)$$

各面束缚电荷密度  $\eta_b$  为

$$\eta_{bx+} = 0\sigma_x + 0\sigma_y + 0\tau_{xy} = 0 \quad (6.4.17)$$

$$\eta_{by+} = 0\sigma_x + 0\sigma_y + 0\tau_{xy} = 0 \quad (6.4.18)$$

$$\begin{aligned} \eta_{bz+} &= 2.31 \times 10^{-12} \sigma_x - 0.727 \times 10^{-12} \tau_{xy} \\ &= q(-0.000\ 173\ 25x^2y + x(-9.522\ 59 \times 10^{-9} \\ &\quad + 0.000\ 176\ 628y^2) + 6.559\ 73 \times 10^{-6} y(0.098\ 098\ 2 + y^2)) \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

### 6.4.3 极化电场模拟

根据坐标变换, 在当前计算坐标系下的介电常数  $\varepsilon_{11} = 4.52$ ,  $\varepsilon_{33} = 4.62$ , 表示成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 0 & 0 \\ 0 & 4.62 & 0 \\ 0 & 0 & 4.52 \end{pmatrix} \quad (6.4.20)$$

为了形象地描述石英晶片扭转产生的极化电场,下面采用有限元来求解电场的分布。根据有物质存在时静电场所遵循的原则,由于压电片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场,等效束缚电荷所产生的电场同样满足麦克斯韦方程。在实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性微分控制方程为

$$4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + 4.62 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.4.21)$$

在进行电场模拟时采用电荷边界,根据第4章的电场分析,电荷边界条件的形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \eta_b \quad (6.4.22)$$

取分布载荷  $q=1$ , 根据电势方程式(6.4.21)和等效极化电荷面密度,通过有限元可求得电场的模拟结果。由于电位云图通常能直观地反映电位在石英晶体内的变化情况,云图颜色变化迅速的部位,即是电位函数变化激烈的部位。因此,本文针对这一特点,采用三维模拟技术绘制弯曲效应的电势分布云图,如图6-21所示。极化电场强度矢量分布如图6-22所示,箭头的尺寸正比于场强大小。

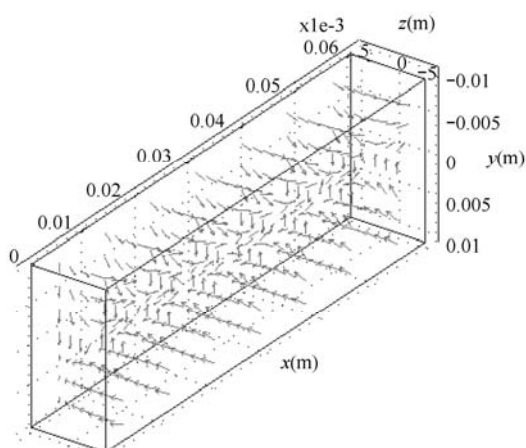
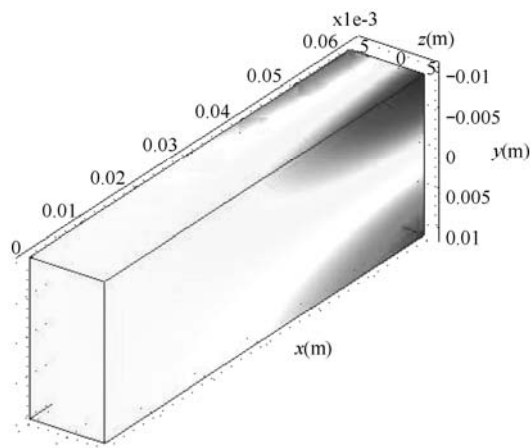


图 6-21 石英晶体弯曲效应的电势分布云图 图 6-22 石英晶体弯曲效应的极化电场强度矢量分布图

## 6.4.4 实验与结果分析

### 1. 束缚电荷分布

为了有效地布置检测电极,应该考虑束缚电荷在晶体表面上的分布情况,根据式(6.4.19)可以得到  $z$  表面的电荷分布,如图6-23所示,可以看出电荷分布不均匀。

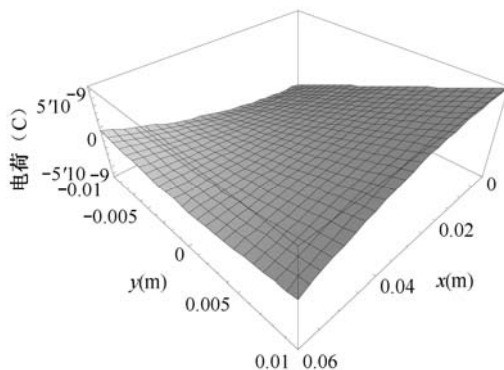


图 6-23 在  $z=0.005\text{ mm}$  表面上的电荷密度分布

考虑到电场和电势分布情况，为了检测出弯曲效应，必须采用分割电极法布置检测电极，如图 6-24 所示为布置 4 片检测电极，电极尺寸为  $9\text{ mm} \times 50\text{ mm}$ 。

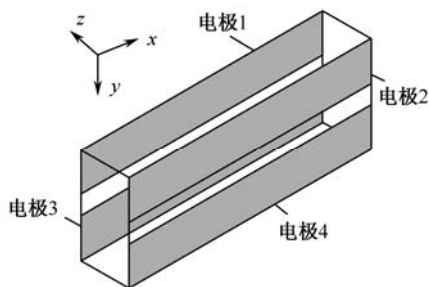


图 6-24 检测电极布置

通过积分式 (6.4.19)，可以得到每个检测电极的理论电荷量为

$$Q_1 = -Q_2 = \iint_{A_1} \eta_{bz+} dx dy = -1.284\ 66q(\text{pC}) \quad (6.4.23)$$

$$-Q_3 = Q_4 = \iint_{A_2} \eta_{bz+} dx dy = 1.187\ 87q(\text{pC}) \quad (6.4.24)$$

## 2. 实验设备

实验设备示意图如图 6-25 所示，每个检测电极连接一个电荷放大器，将电荷信号放大为电压信号，并由数字电压表读出。

## 3. 实验结果与分析

通过实验可以得到极化电荷与外载荷的关系曲线，如图 6-26 所示。由图可见，极化电荷与外载荷呈良好的线性关系。

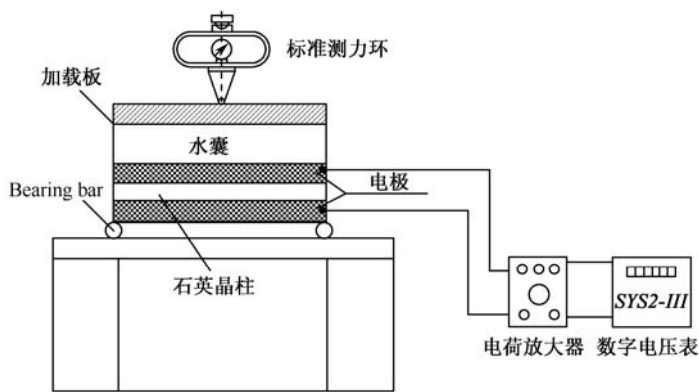


图 6-25 实验设备示意图

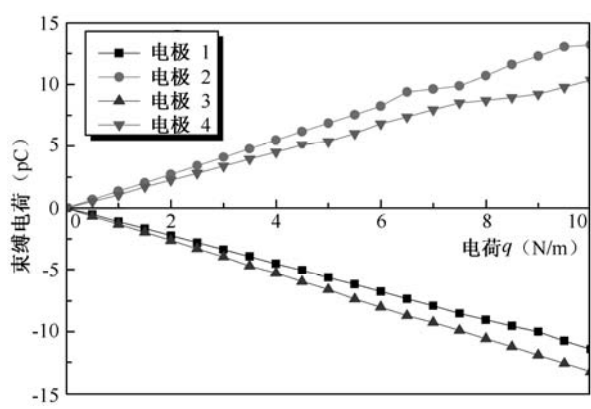


图 6-26 极化电荷与外载荷的关系曲线

### 6.5 基本切型的逆压电弯曲效应研究

哪个方向上有正压电效应，则在此方向上一定存在逆压电效应。下面对  $y0^\circ$  石英切型做如图 6-27 所示的电极布置，研究它在电场作用下的弯曲变形情况。 $y0^\circ$  石英切型薄长片一端固定，构成等直悬臂梁，沿  $x$  轴正向极化，长度为  $l$ ，宽度为  $w$ ，厚度为  $t$ ，上下两表面电极均沿长度方向分割为对称的两部分，假定分割线宽度为零，则分割线（ $y$  轴）为对称轴，两部分电极宽度均为  $w/2$ 。

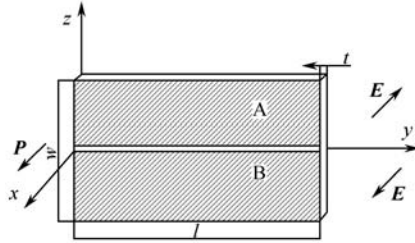


图 6-27 理想分割电极片状压电制动器的等直悬臂梁模型一

若在  $z < 0$  部分 B 施加沿  $x$  轴正向电场  $E$ ，在  $z > 0$  部分 A 施加沿  $x$  轴反向电场  $E$ ，则逆压电效应使  $z > 0$  部分伸长，使  $z < 0$  部分缩短，由于 A、B 两部分在材料结构上是一体的，因此压电片沿宽度方向（ $z$  方向）产生弯曲变形，其端部产生沿  $z$  轴负向的位移  $\delta$ 。

由于压电片极化方向与外加电场方向不垂直，因此逆压电效应不产生剪切应力，若假定  $l \gg w, t$ ，则致动器在电场作用下的变形可以看成梁的纯弯曲问题，此时压电片内部的 6 个应力分量只有  $T_2 \neq 0$ （ $\sigma_2 \neq 0$ ）。要求解致动位移与驱动电压的关系需要从压电方程入手。

### 6.5.1 压电方程

Smits 等人研究过压电双晶片的本构方程，王志宏等人用类似的方法研究了分割电极单体片状致动器的端部位移，可根据上述两理论研究单体石英切片的弯曲变形情况。选应力  $T$  和电场  $E$  为独立变量，则相应的压电方程为

$$\begin{aligned} S_I &= s_{IJ}^E T_J + d_{jI} E_j & I, J &= 1, 2, \dots, 6 \\ D_i &= d_{iJ} T_J + \varepsilon_{ij}^T E_j & i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

式中， $S_I$ 、 $D_i$  分别是应变和电位移矢量的分量； $s_{IJ}^E$  是短路弹性柔顺系数； $\varepsilon_{ij}^T$  是应力自由介电常数； $I, J$  和  $i, j$  分别代表力学和电学分量； $d_{jI}$  是压电应变常数。

图 6-27 中致动器模型的应力和电场分量满足

$$\begin{aligned} T_2 &\neq 0, T_1 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0 \\ E_1 &\neq 0, E_2 = E_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

因此，图 6-27 中所描述的致动器 A、B 两部分的压电方程可分别简化为

$$S_2^B = s_{22}^E T_2^B + d_{12} E_1 \quad (6.5.3)$$

$$D_1^A = -d_{12} T_2^A + \varepsilon_{11}^T E_1$$

$$S_2^B = s_{22}^E T_2^B + d_{12} E_1 \quad (6.5.4)$$

$$D_1^B = d_{12} T_2^B + \varepsilon_{11}^T E_1$$



式中, 上标 A,B 分别代表致动器的 A,B 两部分。式 (6.5.3) 中的负号是由于外电场与极化方向相反所致。

### 6.5.2 自由端致动位移

若所施加电场为  $E$ , 则所加电压为  $V = Et$ 。假设施加电压后致动器 A,B 两部分内分别产生沿  $y$  方向的轴力  $F^A, F^B$  和正向弯矩  $M^A, M^B$ , 如图 6-28 所示。它们的共同作用是使致动器发生弯曲变形, 端部产生沿  $z$  轴方向的位移  $\delta$ 。

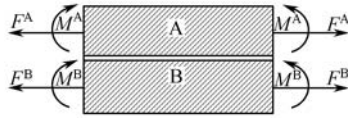


图 6-28 等直梁中轴向力和弯矩的假设示意图

由于压电片在结构上是单片, 因此在分界面 (电极分割线) 上两部分的应变是连续的, 曲率相等。梁处于静态平衡时, 有

$$F^A + F^B = 0 \quad (6.5.5)$$

$$M^A + M^B - F^A \frac{w}{4} + F^B \frac{w}{4} = 0 \quad (6.5.6)$$

$$\frac{F^A s_{22}^E}{t \cdot w/2} + \frac{M^A w/4}{EI_x} - d_{12} E_1 = \frac{F^B s_{22}^E}{tw/2} - \frac{M^B w/4}{EI_x} + d_{12} E_1 \quad (6.5.7)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M^A}{EI_x} = \frac{M^B}{EI_x} \quad (6.5.8)$$

式中,  $\rho$  是曲率半径,  $E = 1/s_{22}^E$  是杨氏模量,  $I_x$  是 A,B 两部分横截面对各自中性轴 (与  $y$  轴同向) 的惯性矩, 且

$$I_x = t \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^3 / 12 \quad (6.5.9)$$

式 (6.5.7) 中等式两端的第一项是均匀应力引起的应变, 第二项为弯矩引起的应变, 第三项是电场产生的应变, 由式 (6.5.5) ~ 式 (6.5.8) 可以解出

$$M^A = M^B = M = tw^2 d_{12} E_1 / 32 s_{22}^E \quad (6.5.10)$$

$$F^A = tw d_{12} E_1 / 8 s_{22}^E \quad (6.5.11)$$

$$F^B = -tw d_{12} E_1 / 8 s_{22}^E \quad (6.5.12)$$

由于  $d_{12} < 0$ , 因此  $M^A$  和  $M^B$  是负的, 与图 6-28 中所示的方向相反,  $F^B$  也与图 6-28 中所示的方向相反。

由梁的挠度曲线微分方程

$$EI_x z'' = M \quad (6.5.13)$$

可以解出宽度弯曲致动器的曲率为

$$z'' = \frac{M}{EI_x} = 3d_{12} E_1 / w \quad (6.5.14)$$

由悬臂梁的边界条件  $y=0$ ,  $z'=0$ ,  $z=0$ , 得自由端  $y=l$  的转角  $\alpha$  和致动位移  $\delta$  分别为

$$\alpha = 3d_{12} E_1 l / w \quad (6.5.15)$$

$$\delta = 3d_{12} E_1 l^2 / 2w = \frac{3d_{12} V l^2}{2wt} \quad (6.5.16)$$

由于  $d_{12} < 0$ , 因此  $\delta < 0$ 。宽度弯曲压电致动器沿  $z$  轴反方向弯曲, 挠度曲线方程为

$$z = 3d_{12} E_1 y^2 / 2w \quad (6.5.17)$$

图 6-29 所示为端部致动位移与驱动电压的关系。若  $y0^\circ$  切型的石英晶片尺寸为  $l=30\text{ mm}$ ,  $w=3\text{ mm}$ ,  $t=3\text{ mm}$ , 在合适的电场驱动下端部致动位移可达纳米量级, 比同样尺寸的压电陶瓷片小两个数量级, 因此可作为微定位执行器。

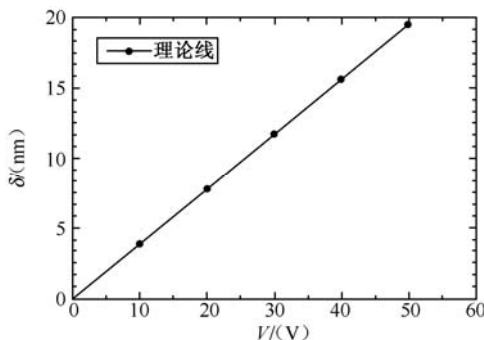


图 6-29 端部致动位移与驱动电压的理论关系

同理, 如图 6-30 所示, 若所施加电场为  $E$ , 电场  $E$  分解为  $E_1$ 、 $E_3$  两个方向。推导出如图所示电极布置  $y0^\circ$  切型的石英晶片自由端  $y=l$  的转角  $\alpha$  和致动位移  $\delta$  分别为

$$\alpha = 3d_{12} E_1 l / w \quad (6.5.18)$$

$$\delta = 3d_{12} E_1 l^2 / 2w = 3\alpha d_{12} E l^2 / 2w \quad (6.5.19)$$

式中,  $\alpha$  是电场  $E_1$  的有效分量系数, 与  $w, t$  有关。由于  $d_{12} < 0$ , 因此  $\delta < 0$ 。宽度弯曲压电致动器沿  $x$  轴反方向弯曲, 挠度曲线方程为

$$x = 3d_{12} E_1 y^2 / 2w \quad (6.5.20)$$

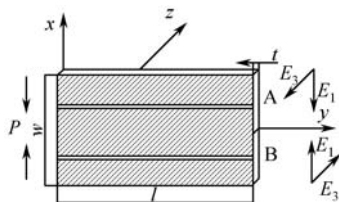


图 6-30 理想分割电极片状压电制动器的等直悬臂梁模型二

## 6.6 基于谐振器的双向微动机构的设计

自 1880 年发现石英晶体的压电效应至今已经一个多世纪了，用石英谐振器作为频率控制和频率标准也有 80 多年的历史。石英谐振器不但在军事通信装置和科研仪器设备中占有重要地位，而且在民用方面也发展很快，电子手表中的石英谐振器就是其中之一。由于石英晶体的压电系数较小，所以一般不用它来制作执行器件，但随着 MEMS 的发展，压电系数小这一特点又有其独特的优势，我们可以应用它来制作微执行器。本章正是基于第 5 章理论及实验的结论，提出一种可在  $X, Y$  方向做双向振动的微型振动机构，旨在为研制微型雕刻装置——压电雕刻笔式执行器打下基础。

### 6.6.1 石英谐振器弯曲振动模式

石英晶片在电场作用下，由于内部产生应力而形变，从而产生机械振动。石英谐振器的振动模式有长度伸缩模式、弯曲振动模式、面切变振动模式和厚度切变振动模式。按照不同的使用要求，石英谐振器的标称频率从几千赫兹到几百赫兹。这样宽的频率范围是通过采用不同的振动模式和晶片尺寸来实现的。其中弯曲振动石英谐振器是 4 种弯曲振动模式中频率最低的一种。它的频率范围为  $2 \sim 100$  kHz。弯曲振动又分为厚度弯曲振动和面（宽度弯曲）弯曲振动两种。它的常用切型为  $(xyt)0^\circ \sim 5^\circ$  和  $(xytl)0^\circ \sim 8^\circ$   $30' / \pm 38^\circ \sim \pm 70^\circ$ ，即  $x0^\circ \sim 5^\circ$  和 NT 切型。其中， $x0^\circ \sim 5^\circ$  切型主要用于厚度弯曲，频率在 50 kHz 以下；NT 切型主要用于面弯曲，频率范围为  $16 \sim 100$  kHz。弯曲振动的应力特点是当弯曲时，应力使石英棒的一个半边（宽度或厚度方向）伸长而另一半边缩短，这必须在符号相反的电场作用下才能实现。但对于压电石英振子，在一般电场作用下，只能产生伸缩形变或剪切形变，而不能产生弯曲形变。因此，为了使石英棒产生弯曲振动，必须对电极做特殊的安排。图 6-31 和图 6-32 所示是这两种振动模式常见的电极设置和电场分布。

从图 6-31 中的电场分布可以看出，电场能分解为沿  $x$  方向的  $\pm E_1$  的电场分量和沿  $z$  方

向的 $\pm E_3$ 的电场分量。这种晶棒主要是由电场 $\pm E_1$ 通过压电常数 $d'_{12}$ 产生 $y$ 方向的伸缩形变,即石英晶棒的左半部分缩短,右半部分伸长。当电场在下一瞬间改变方向时,形变则相反。电场不断改变方向,则石英晶棒产生沿 $x$ (厚度)方向的弯曲振动。而对于图 6-32 中的电场分布,石英晶棒在电场 $\pm E_1$ 的作用下上半部分缩短,下半部分伸长。当电场在下一瞬间改变方向时,形变则相反。电场不断改变方向,则石英晶棒产生沿 $z$ (宽度)方向的弯曲振动。因此晶棒的弯曲振动可视为分别做伸与缩振动的两部分在同一棒上的合成运动,即可以认为棒的伸缩振动是压电效应的直接作用,弯曲振动是压电效应的间接作用。另外一种厚度弯曲振动的电极设置方式如图 6-33 所示。这样,根据图 6-32 和图 6-33 所示的电极布置,我们在石英晶体的 4 个侧面上都布上电极,如图 6-34 所示,便可在同一块石英晶体上实现宽度和厚度两个方向的振动。

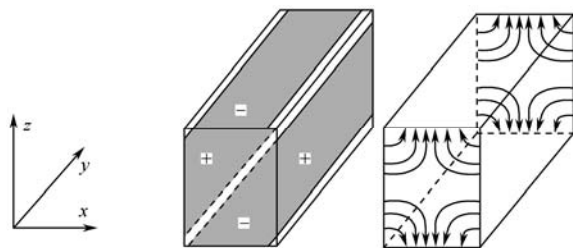


图 6-31 厚度弯曲振动电极设置和电场分布示意图

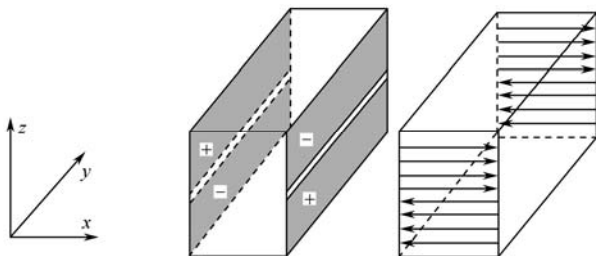


图 6-32 宽度弯曲振动电极设置和电场分布示意图

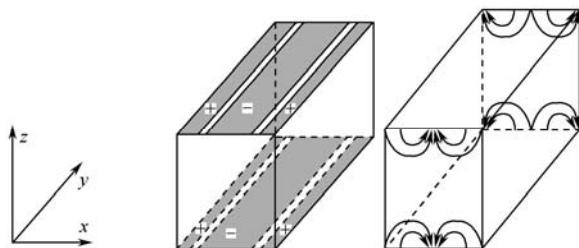


图 6-33 另一种厚度弯曲振动电极设置和电场分布示意图

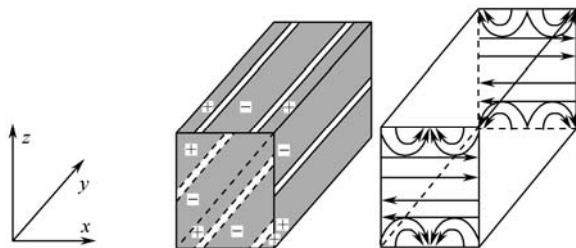


图 6-34 双向振动的微动机构电极布置和电场分布示意图

## 6.6.2 双向微动机构的设计

### 1. 切型的选择

弯曲振动常用切型为  $(xyt)0^\circ \sim 5^\circ$  和  $(xytl)0^\circ \sim 8^\circ 30' / \pm 38^\circ \sim \pm 70^\circ$ , 即  $x0^\circ \sim 5^\circ$  ( $xy'$  棒) 和 NT 切型。切型的选择可根据使用频率范围及技术要求而定。从方便加工和节省原料考虑, 应优先选取  $xy'$  棒。通常 10 kHz 以下采用  $xy'$  棒; 10~20 kHz 时这两种切型均可采用, 最好采用  $xy'$  棒; 20 kHz 以上采用 NT 切型较多。由于是在同一块石英晶体上实现宽度和厚度两个方向的弯曲振动, 因此我们只能选可同时满足两个方向弯曲振动的同一种切型, 根据它们常用的工作频段, 可定其标称频率为 18 kHz, 切型为  $xy'$  棒。而弯曲振动单频性最好的切型是  $(xyt)-18^\circ 30'$  和  $(xyt)43^\circ$ 。从前面对压电常数  $d_{12}$  优化的结果来看, 压电活力并未得到显著提高。而零温度系数 (Zero Temperature Coefficient) 即 Z.T.C 点, 是影响该微动机构能否稳定工作的主要因素, 弯曲振动模式的零温度系数切型是  $(xyt)5^\circ$ , 但 Z.T.C 点不但与切型有关, 还与边比有关。当  $xy'$  棒切型是  $x-1^\circ \sim x+1^\circ$  且边比为 0.055~0.10 时, Z.T.C 点大约是 20℃, 这正好是室温, 为了保证微振机构有足够的强度, 我们选取边比为 0.10。为了减少各种振动之间的耦合, 并综合考虑压电活力及零温度系数这两方面因素, 我们选取  $(xyt)0^\circ$  切型, 即  $y0^\circ$  晶柱, 边比为 0.10。

### 2. 晶体尺寸的确定

频率常数与边比的关系曲线如图 6-35 所示, 由图可找到当边比  $\rho_r = t/l = 0.1$  时的频率常数  $K_f = 5\,375 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ 。由此计算晶体的长度为

$$l = K_f \frac{\rho_r}{f} = 5\,375 \times \frac{0.1}{18} = 29.86 \text{ mm}$$

式中,  $f$  是标称频率。

因此晶柱的厚度为  $t = 2.986 \text{ mm}$ ，按照石英晶棒的电极布置要求和其要实现的微雕功能选定宽度与厚度相同，即  $w = 2.986 \text{ mm}$ 。当考虑加工方便及计算误差时，选定晶体长度  $l = 30 \text{ mm}$ ，宽度和厚度均为  $3 \text{ mm}$ 。但上述计算中的标称频率是按两端自由的弯曲振动频率来计算的，而这里设计的微动机构为一端固定另一端自由的悬臂梁式结构，其振动频率比两端自由的弯曲振动更低，为两端自由的  $0.16$  倍。因此其实际的标称频率为  $f = 0.16 \times 18 = 2.88 \text{ kHz}$ 。

因此该微动机构的标称频率为  $2.88 \text{ kHz}$ ，晶体切型为  $y0^\circ$  晶柱，尺寸为  $x \times y \times z = t \times w \times l = 3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ 。

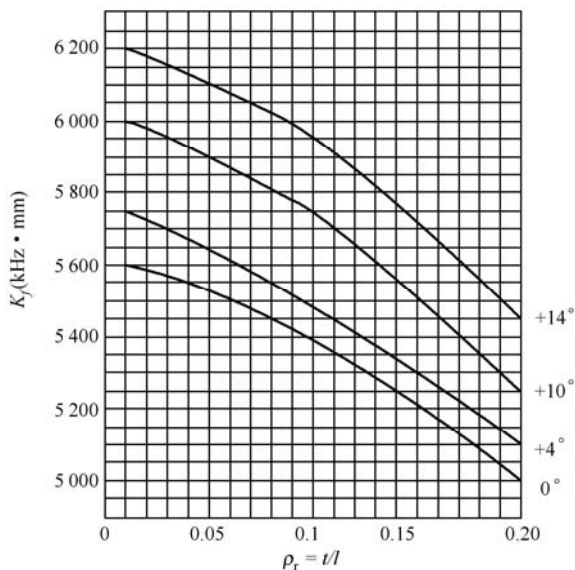


图 6-35 频率常数与边比的关系曲线

由于所设计微动机构的端部致动静态位移非常小，根据设计该执行器的目的——用于微小雕刻加工，所以让其工作在谐振状态下，这样其端部致动位移能够放大  $2 \sim 3$  个数量级。因为受检测手段的限制，这里我们只对该微动机构做定性的实验检测。为了进一步观察其动作，在其端部黏结一个细长的探针，这样它的致动位移又得到进一步的放大。我们在万能工具显微镜下观察探针的端部位移，用低频信号发生器在该执行器上施加交流驱动电压，并调节驱动电压的频率，观察到当驱动电压为  $100 \text{ V}$ ，驱动电压的频率为  $1.46 \text{ kHz}$  时，探针在理论动作方向上有摆动的动作，且该执行器有谐振的尖叫声，而在其他频段探针没有动作。实验的谐振频率与理论值有较大偏差，分析原因应该是由于所黏结的电极、探针和安装方式引起的。至此，我们可以得出初步的结论：前面的理论分析和微动机构的设计是正确的，用单块石英晶体研制微型执行器实现微雕功能的想法是可行的。

## 第 7 章

# 圆形石英晶片扭转效应研究

圆形石英晶片扭转效应研究的是在外加扭矩作用下晶片内部产生扭转应力，由于压电效应，在晶片内部与表面产生极化体电荷与面电荷的过程。该研究将为新型扭矩传感器的设计奠定理论基础。

### 7.1 圆形石英晶片扭转效应的数值计算

一个由直线型均匀各向异性材料石英组成的圆片如图 7-1 所示，其中一个端面固定，另一端面作用一个扭矩  $M_t$ ，扭矩方向与端面方向一致。将笛卡儿坐标系圆点选在固定端面中心， $z$  轴沿圆片的轴线方向， $x$ 、 $y$  可在圆片内任意放置。该右旋 $\alpha$ 石英晶片的半径  $r=9.75$  mm，厚度为 1 mm。石英晶片的晶体坐标系为  $O'x'y'z'$ 。

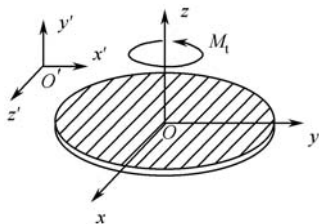


图 7-1 晶体坐标系与计算坐标系

### 7.1.1 扭转应力计算

32 点群石英晶体的弹性顺度常数矩阵  $\mathbf{s}$  在晶体坐标系中的形式为

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{14} & 2(s_{11} - s_{12}) \end{pmatrix} \quad (7.1.1)$$

由于描述材料物理性质的张量在均质体中具有平移不变性，在晶体坐标系中，右旋  $\alpha$  石英的弹性顺度常数的数值为

$$\begin{cases} s_{11} = 12.77 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}, & s_{33} = 9.60 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} \\ s_{44} = 20.04 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}, & s_{12} = -1.79 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} \\ s_{13} = -1.22 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}, & s_{14} = -4.50 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} \end{cases}$$

由于压电系数、弹性系数等相关参数都是按晶体坐标系给定的，为了计算方便，需将晶体坐标系变换到当前计算坐标系  $Oxyz$ ，如图 7-1 所示。具体方法是将晶片绕晶体坐标系  $O'x'y'z'$  的  $x'$  轴逆时针旋转  $270^\circ$ ，此时的正交变换矩阵为

$$\mathbf{A}_1 = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ 0 & -\sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.2)$$

再沿旋转后的新坐标  $z$  轴逆时针旋转  $270^\circ$ ，从而得到所用的计算坐标系  $Oxyz$ ，这次的正交变换矩阵为

$$\mathbf{A}_2 = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ & 0 \\ -\sin 270^\circ & \cos 270^\circ & 0 \\ 0 & -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1.3)$$

根据张量变换的知识，在坐标系进行  $[\theta, 0, \alpha]$  变换后，合成的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \theta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \theta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \theta & \cos \alpha \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1.4)$$

在当前计算坐标系下，在进行上述坐标变换后，根据式 (A.2.9) 可求得弹性顺度常数的变换矩阵  $\mathbf{N}$  为



$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.5)$$

将弹性顺度常数的数值代入式 (A.2.9) 后, 联立式 (7.1.5), 可得弹性顺度常数在当前计算坐标系下的数值。

$$s' = \begin{pmatrix} 9.6 \times 10^{-12} & -1.22 \times 10^{-12} & -1.22 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ -1.22 \times 10^{-12} & 12.77 \times 10^{-12} & -1.79 \times 10^{-12} & 0 & -4.5 \times 10^{-12} & 0 \\ -1.22 \times 10^{-12} & -1.79 \times 10^{-12} & 12.77 \times 10^{-12} & 0 & 4.5 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.12 \times 10^{-12} & 0 & -9 \times 10^{-12} \\ 0 & -4.5 \times 10^{-12} & 4.5 \times 10^{-12} & 0 & 20.04 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9.0 \times 10^{-12} & 0 & 20.04 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \quad (7.1.6)$$

对于当前石英晶片扭转问题, 因为石英晶片的弹性对称面垂直于晶体坐标系  $x$  轴, 即石英晶片的弹性对称面不与横截面重合, 根据第3章各向异性弹性体扭转理论可知, 这种情况是各向异性弹性体的空间扭转问题。此时石英晶片扭转问题的平面应力函数  $F(x,y)$  和扭转应力函数  $\phi(x,y)$  应满足下面的微分控制方程式 (7.1.7) ~ 式 (7.1.9) 和边界条件式 (7.1.10) ~ 式 (7.1.11)。

$$L_4 F + L_3 \phi = 0 \quad (7.1.7)$$

$$L_3 F + L_2 \phi = -2\mathcal{G} + \frac{M_t}{2s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \quad (7.1.8)$$

这里微分算子为

$$\left. \begin{aligned} L_4 &\equiv \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3 &\equiv -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 &\equiv \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.1.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \phi|_r = 0 \quad (7.1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \iint \tau_{xz} dx dy &= 0, \iint \sigma_z y dx dy = 0 \\ \iint \tau_{yz} dx dy &= 0, \iint \sigma_z x dx dy = 0 \\ \iint \sigma_z dx dy &= 0, \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M_t \end{aligned} \right\} \quad (7.1.11)$$

对于实验用圆形石英晶片, 由边界条件式 (7.1.10) 的前两式  $\partial F / \partial x = 0$ ,  $\partial F / \partial y = 0$  可得

$$F(x, y) = C$$

根据应力函数的定义可知, 常数的应力函数不会影响应力数值。所以可设定

$$F(x, y) = 0 \quad (7.1.12)$$

由边界条件式 (7.1.10) 的第 3 式  $\phi|_r = 0$  可设定

$$\bar{\phi}(x, y) = A \cdot [r^2 - (x^2 + y^2)] \quad (7.1.13)$$

将式 (7.1.12)、式 (7.1.13) 及式 (3.3.41) 代入式 (7.1.8) 中, 可求得

$$A = 1/(\beta_{44} + \beta_{55}) \quad (7.1.14)$$

最终得到

$$\bar{\phi}(x, y) = [r^2 - (x^2 + y^2)]/(\beta_{44} + \beta_{55}) \quad (7.1.15)$$

将式 (7.1.15) 代入式 (3.3.41), 可得到扭转应力函数

$$\phi(x, y) = \left[ \vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] [r^2 - (x^2 + y^2)]/(\beta_{44} + \beta_{55}) \quad (7.1.16)$$

这里圆形石英晶片的轴惯性矩为

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi r^4}{4} \quad (7.1.17)$$

由式 (3.3.45) 可求出各向同性扭转刚度为

$$\bar{c} = 2 \iint \bar{\phi} dx dy = 2 \iint [r^2 - (x^2 + y^2)]/(\beta_{44} + \beta_{55}) dx dy = \frac{\pi r^4}{\beta_{44} + \beta_{55}} \quad (7.1.18)$$

将各向同性扭转刚度代入式 (3.3.44), 可求得各向异性扭转刚度为

$$c_t = \frac{\bar{c}}{1 + \frac{\bar{c}}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right)} = \frac{\pi r^4}{s_{44} + s_{55}} \quad (7.1.19)$$

由式 (3.3.43) 可求得单位长度扭转角为

$$\vartheta = M_t / c_t = \frac{s_{44} + s_{55}}{\pi r^4} M_t \quad (7.1.20)$$

将式 (7.1.17) 和式 (7.1.20) 代入式 (7.1.16), 可得到最终的扭转应力函数为

$$\phi(x, y) = \frac{r^2 - (x^2 + y^2)}{\pi r^4} M_t \quad (7.1.21)$$

根据平面应力函数的定义式 (3.2.9) 与扭转应力函数的定义式 (3.3.46), 可求得各相应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \bar{U} = 0 \quad (7.1.22)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{U} = 0 \quad (7.1.23)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x}{\pi r^4} M_t = 7.044\ 69 \times 10^7 x M_t \quad (7.1.24)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2y}{\pi r^4} M_t = -7.044\ 69 \times 10^7 y M_t \quad (7.1.25)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7.1.26)$$

由式 (3.3.48) 可求得正应力为

$$\sigma_z = \frac{M_t}{2s_{33}} \left( \frac{s_{34}}{I_2} x - \frac{s_{35}}{I_1} y \right) - \frac{1}{s_{33}} (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) = 0 \quad (7.1.27)$$

## 7.1.2 束缚电荷密度计算

在晶体坐标系下的压电应变系数为  $d_{11}=2.31$  (pC/N),  $d_{14}=-0.727$  (pC/N)。当坐标系旋转时, 在当前计算坐标系下, 压电应变系数张量也要进行坐标变换, 根据压电应变系数的坐标变换式

$$\mathbf{d}' = \mathbf{A} \mathbf{d} \mathbf{N}^t$$

将式 (7.1.4) 和式 (7.1.5) 代入, 可求得在当前坐标系下的压电应变系数为

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 \times 10^{-12} & 2.31 \times 10^{-12} & 0 & -7.27 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.62 \times 10^{-12} & 0 & 7.27 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \quad (7.1.28)$$

将式 (7.1.22) ~ 式 (7.1.27) 代入压电方程式 (7.1.28), 并考虑当前坐标系下的压电应变系数式 (7.1.28), 即可计算出电极化强度的分量为

$$P_x = d_{13}\sigma_z + d_{14}\tau_{yz} + d_{15}\tau_{xz} = 0 \quad (7.1.29)$$

$$P_y = d_{23}\sigma_z + d_{24}\tau_{yz} + d_{25}\tau_{xz} = -d_{25} \frac{2y}{\pi a^4} M_t = 0.000\ 051\ 214\ 9 M_t y \quad (7.1.30)$$

$$P_z = d_{33}\sigma_z + d_{34}\tau_{yz} + d_{35}\tau_{xz} = d_{34}\frac{2x}{\pi a^4}M_t = 0.000\ 325\ 465M_t x \quad (7.1.31)$$

根据第 4 章中对于压电晶片极化的分析, 可以求得扭转产生的等效极化电荷的体密度为

$$\rho_b = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = \frac{2d_{25}}{\pi a^4}M_t = -0.000\ 051\ 214\ 9M_t \quad (7.1.32)$$

在垂直于  $x$  轴的晶体表面上, 扭转产生的等效面束缚电荷密度  $\eta_{bx+}$  和  $\eta_{bx-}$  (下标 “ $x+$ ” 和 “ $x-$ ” 分别表示平面外法线指向  $x$  轴的正向与负向) 为

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (7.1.33)$$

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \cdot -\mathbf{e}_x = 0 \quad (7.1.34)$$

对于此切型的石英晶片, 在  $x$  轴方向没有极化现象。

同理, 可求得在垂直于  $y$ 、 $z$  轴的晶体表面上的等效面束缚电荷密度为

$$\eta_{by+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_y \cdot \mathbf{e}_y = 0.000\ 051\ 214\ 9yM_t \quad (7.1.35)$$

$$\eta_{by-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_y \cdot \mathbf{e}_y = -0.000\ 051\ 214\ 9yM_t \quad (7.1.36)$$

$$\eta_{bz+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_z \cdot \mathbf{e}_z = 0.000\ 325\ 465xM_t \quad (7.1.37)$$

$$\eta_{bz-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_z \cdot \mathbf{e}_z = -0.000\ 325\ 465xM_t \quad (7.1.38)$$

### 7.1.3 扭转极化电场仿真

在晶体坐标系下的介电常数为  $\varepsilon_{11}=4.52$ ,  $\varepsilon_{33}=4.62$ , 表示成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.52 & 0 & 0 \\ 0 & 4.52 & 0 \\ 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \quad (7.1.39)$$

当坐标系旋转时, 在当前计算坐标系下, 介电常数张量也要进行坐标变换, 根据二阶张量的坐标变换规则, 可求得在当前坐标下的数值为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.62 & 0 & 0 \\ 0 & 4.52 & 0 \\ 0 & 0 & 4.52 \end{pmatrix} \quad (7.1.40)$$

为了形象地描述石英晶片扭转产生的极化电场, 下面采用有限元来求解电场的分布。根据有物质存在时静电场所遵循的原则, 压电晶片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场, 等效束缚电荷所产生的电场同样满足麦克斯韦方程。在实验所用

的石英晶片内部, 电势满足的各向异性微分控制方程为

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho_b}{\varepsilon_0} \quad (7.1.41)$$

根据式 (7.1.40) ~ 式 (7.1.41), 在当前计算坐标系下, 实验所用的石英晶体内部电势满足的各向异性方程为

$$4.62 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + 4.52 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = \frac{0.000\,051\,214\,9 M_t}{\varepsilon_0} \quad (7.1.42)$$

在进行电场模拟时采用电荷边界, 根据第 4 章的电场分析, 电荷边界条件的形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \eta_b \quad (7.1.43)$$

(1) 上横截面  $z=0.001$  m 处:

此时, 外法线为  $\mathbf{n} = \{0, 0, \mathbf{e}_z\}$ , 极化面电荷密度为

$$\eta_{bz+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_z |_{z=0.001} = 0.000\,325\,465 M_t x \quad (7.1.44)$$

(2) 下横截面表面  $z=0$  m 处:

此时, 外法线为  $\mathbf{n} = \{0, 0, -\mathbf{e}_z\}$ , 极化面电荷密度为

$$\eta_{bz-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_z |_{z=0.001} = -0.000\,325\,465 M_t x \quad (7.1.45)$$

(3) 外圆环表面  $r=0.009\,75$  m 处:

此时, 外法线为  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, 0\}$ , 其中,  $\cos \alpha = x / \sqrt{(x^2 + y^2)}$ ,  $\cos \beta = y / \sqrt{(x^2 + y^2)}$ ,

极化面电荷密度为

$$\begin{aligned} \eta_r &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = (P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta) |_{r=0.009\,75} = P_y \cos \beta |_{r=0.009\,75} \\ &= 0.000\,051\,214\,9 y^2 / \sqrt{(x^2 + y^2)} M_t |_{r=0.009\,75} \\ &= 0.000\,051\,214\,9 y^2 / 0.009\,75 \cdot M_t \end{aligned} \quad (7.1.46)$$

取扭矩为单位扭矩  $1 \text{ N} \cdot \text{mm}$ , 根据电势方程式 (7.1.42) 和等效极化面电荷密度式 (7.1.44) ~ 式 (7.1.46), 通过有限元可求得电场的模拟结果。

由于电位云图通常能直观地反映电位在石英晶片内的变化情况, 云图颜色变化迅速的部位, 即是电位函数变化激烈的部位。因此, 本文针对这一特点, 采用三维模拟技术绘制扭转效应的电势分布云图, 如图 7-2 所示。极化电场强度矢量分布如图 7-3 所示, 箭头的尺寸正比于场强大小。从图中可以看出, 电场强度从一个半圆晶片指向相对应的另一个半圆晶片, 这符合电荷在一个半圆晶片的表面为正, 而在另一表面为负的计算结果。

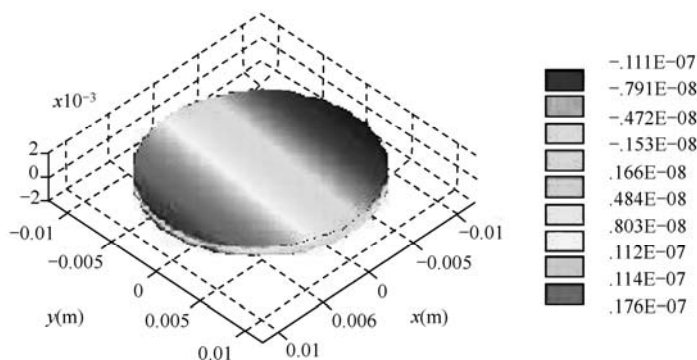


图 7-2 石英晶片扭转效应的电势分布云图

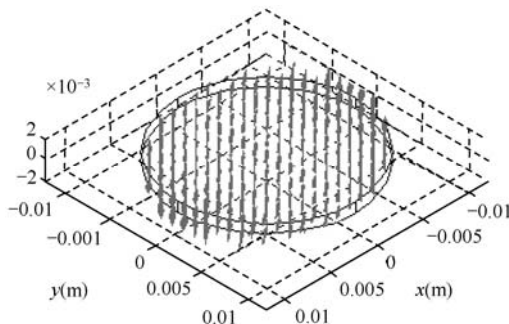
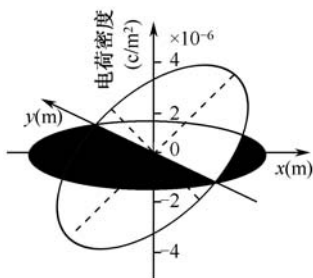


图 7-3 石英晶片扭转效应的极化电场强度矢量分布图

## 7.1.4 石英晶片扭转效应的实验验证

### 1. 扭转束缚电荷密度分布

对于石英晶片扭转效应的应用来说,为了合理地布置电极以有效地检测扭转效应的电性效果,一定要在晶片表面粘贴电极,所以必须考虑面束缚电荷在晶片表面的分布情形。由束缚电荷密度计算可知,晶片上与  $x$  轴垂直的表面束缚电荷密度为零,与  $y$  轴垂直的表面为圆环面,不便于贴放电极,而与  $z$  轴垂直表面的束缚电荷是非均匀的,如图 7-4 所示。可以看出束缚电荷以  $y$  轴为分界线,在  $x$  大于 0 的半平面上束缚电荷密度大于零,在  $x$  小于 0 的半平面上束缚电荷密度小于零,所以检测晶片的扭转效应必须采用分割电极法来布置电极,即在晶片表面以  $y$  轴为分界线,每个半圆表面粘贴一片。

图 7-4  $xOy$  截面电荷密度分布图

## 2. 石英晶片扭转效应的实验结果

从上述分析可知,为了测量扭转效应的电性效果,需将扭转束缚电荷从晶体表面取出,为此必须采用分割电极法进行测量,即在晶片上布置两片半圆环形电极进行测量,一片检测正电荷,另一片检测负电荷,晶片与电极布置如图 7-5 所示。

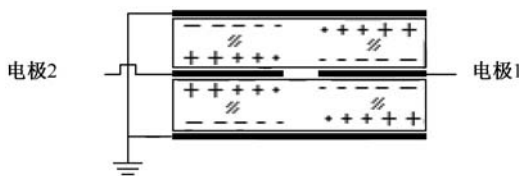


图 7-5 晶片与电极布置图

如果将电极 1 和电极 2 直接相接的话,会因为电荷数量正负抵消而没有信号,为了实现测量,需要分别将每一个测量电极连接一个电荷放大器和数字电压表,完整的测量原理图如图 7-6 所示。

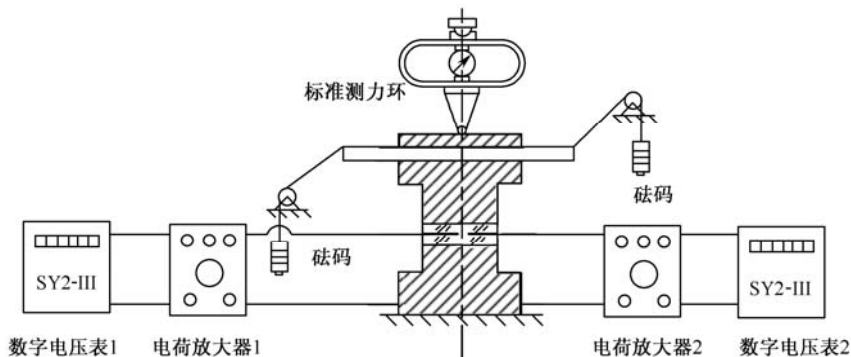


图 7-6 两片石英晶片的扭转效应的完整测量结构图

检测电极上靠近压电晶体一侧由扭转效应所感生的自由电荷的面密度与压电体表面的极化电荷面密度，其大小相等，符号相反，而通过屏蔽线移动到同电极相连的高灵敏度电荷放大器的电荷放大级前端的总电量与检测电极覆盖区域的压电晶体表面极化电荷的总量相等，且符号相同。

各个电极所检测到的电量理论值可利用式（7.1.37）通过积分计算得到。

$$Q_1 = 2 \iint \eta_{bz+} da_{\text{电极1}} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta_{bz+} r dr d\theta = 402.213 M_t (\text{pC})$$

(7.1.47)

$$Q_2 = \iint \eta_{bz+} da_{\text{电极1}} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta_{bz+} r dr d\theta = -402.213 M_t (\text{pC})$$

(7.1.48)

实测的各电极上的感应电荷量随扭矩变化的数据如表 7-1 所示，并示于图 7-7 中。其中扭矩  $M_t$  的单位为  $\text{N} \cdot \text{mm}$ ，而通过各个检测电极所检测到的电量的单位则采用  $\text{pC}$  ( $10^{-12}\text{C}$ )。从中可以发现无论是理论曲线还是实验结果，均表明每片电极所测量的电荷量与扭矩成线性关系，随着扭矩增加，电荷量也不断增大，而且两电极所检测电荷极性确实相反。

表 7-1 各个电极上感应电量随扭矩变化的实测数据

扭矩 (N·mm)	电极 1 电量 (pC)	电极 2 电量 (pC)	扭矩 (N·mm)	电极 1 电量 (pC)	电极 2 电量 (pC)
-490.0	-135.176	124.375	24.5	6.330	-6.417
-465.5	-126.700	116.500	49.0	12.167	-12.333
-441.0	-122.750	109.250	73.5	20.000	-18.750
-416.5	-116.000	104.250	98.0	26.250	-24.750
-392.0	-106.299	98.250	122.5	33.000	-32.800
-367.5	-97.933	94.083	147.0	40.750	-38.200
-343.0	-94.967	88.917	171.5	47.250	-44.250
-318.5	-86.000	81.670	196.0	52.750	-50.333
-294.0	-81.000	74.500	220.5	60.333	-59.250
-269.5	-72.625	65.375	245.0	68.250	-65.500
-245.0	-65.833	58.670	269.5	76.250	-69.000
-220.5	-58.583	52.875	294.0	82.625	-76.625
-196.0	-52.958	47.333	318.5	91.750	-83.375
-171.5	-45.833	42.375	343.0	97.250	-89.893
-147.0	-41.750	35.625	367.5	103.417	-97.200



续表

扭矩 (N·mm)	电极 1 电量 (pC)	电极 2 电量 (pC)	扭矩 (N·mm)	电极 1 电量 (pC)	电极 2 电量 (pC)
-122.5	-33.667	29.375	392.0	110.000	-105.625
-98.0	-25.000	24.375	416.5	115.750	-111.667
-73.5	-18.750	17.750	441.0	122.917	-116.750
-49.0	-12.500	12.167	465.5	127.500	-123.500
-24.5	-6.833	6.300	490.0	132.667	-129.333

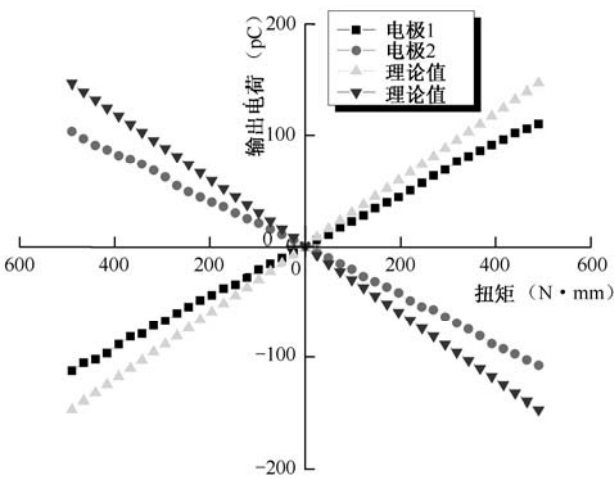


图 7-7 感应电量与扭矩的关系

综上所述，虽然实验值同理论值之间存在着偏差，但无论是从理论出发所得到的结论，还是从实验出发所得到的数据，都表明了这样一个事实，即压电石英晶片确实存在扭转效应，同时也证明了石英晶片扭转效应理论分析的正确性。

7.1.5 扭转电荷灵敏度分布规律的研究

1. 扭转电荷灵敏度分布规律的理论计算

扭转电荷灵敏度分布是指在一定的扭矩下，对于特定切型的晶片采用分割电极法进行扭转电荷检测时，电极分割线在不同位置（电极贴放角度不同）时检测的电荷量变化规律。

扭转电荷灵敏度分布规律的研究是研制与生产扭矩传感器的工艺理论基础。对于压电式力传感器,影响横向干扰的主要因素是石英晶片的切型精度,而切型精度又通过其电荷灵敏度分布规律直接反映出来。

对式(7.1.37)进行积分,可以得到石英晶片在扭矩  $M_t$  作用下在  $z$  表面上单片半圆电极所能检测到的电荷量为

$$Q = d_{34} \frac{2M_t}{\pi r^4} \cdot \frac{2r^2}{3} = d_{34} \frac{4M_t}{3\pi r^2} \quad (7.1.49)$$

由式(7.1.49)可知,当扭矩与晶片半径一定时,产生的电荷只与  $d_{34}$  有关,即扭转电荷灵敏度分布规律实际上仅与晶体的材质和切型有关,所以对其分布规律的研究实质上也就是对晶片中各不同方向压电系数  $d$  的研究。通常  $d$  是在晶体坐标系中给定的,各个方向的作用力也是相对于晶体坐标系  $Ox'y'z'$  给定的,所以扭转电荷灵敏度的研究实际上是计算压电系数  $d_{34}$  在新坐标系  $Ox''y''z''$  下的值,如图 7-8 所示。

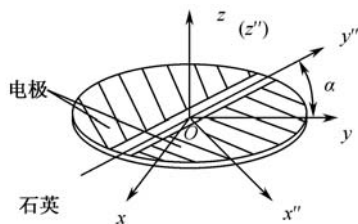


图 7-8 电极贴放角度示意图

令电极分割线绕  $z$  轴旋转  $\alpha$  角后,得到新坐标系  $Ox''y''z''$ ,则相应的坐标变换矩阵为

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1.50)$$

将其代入式(A.2.9),可求得  $N$  的转置矩阵为

$$N^t = \begin{pmatrix} (\cos \alpha)^2 & (\sin \alpha)^2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ (\sin \alpha)^2 & (\cos \alpha)^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 \end{pmatrix} \quad (7.1.51)$$

将坐标变换矩阵式 (7.1.50) 和  $N$  的转置矩阵代入式 (A.3.7), 可求得在新坐标系下的压电系数为

$$\mathbf{d}' = \begin{pmatrix} (\sin \alpha)^3 d_{11} & (\cos \alpha)^2 \sin \alpha d_{11} & -\sin \alpha d_{11} & -(\sin \alpha)^2 d_{14} & \cos \alpha \sin \alpha d_{14} & 2 \cos \alpha (\sin \alpha)^2 d_{11} \\ \cos \alpha \sin \alpha^2 d_{11} & \cos \alpha^3 d_{11} & -\cos \alpha d_{11} & -\cos \alpha \sin \alpha d_{14} & \cos \alpha^2 d_{14} & 2 \cos \alpha^2 \sin \alpha d_{11} \\ -\cos \alpha \sin \alpha d_{14} & \cos \alpha \sin \alpha d_{14} & 0 & -2 \cos \alpha d_{11} & -2 \sin \alpha d_{11} & -(\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) d_{14} \end{pmatrix} \quad (7.1.52)$$

从中可以得到晶片的扭矩灵敏度分布规律为

$$d'_{34} = -2 \cos \alpha d_{11} = d_{34} \cos \alpha \quad (7.1.53)$$

由式 (7.1.53) 可知: 当电极分割线与  $y$  轴不一致时, 扭转电荷灵敏度分布随  $\alpha$  角的变化而呈余弦规律变化。

## 2. 扭转电荷灵敏度分布规律的实验测定

图 7-9 所示为一扭转晶组实测的扭转电荷灵敏度分布规律曲线。横坐标为电极分割线与计算坐标系  $y$  轴之间的夹角, 纵坐标为不同扭矩作用下电极检测到的输出电压。从图中可以看出, 该扭转晶组的扭转电荷灵敏度在不同扭矩作用下的变化规律相同, 而且在同一扭矩下灵敏度分布呈余弦变化规律, 完全验证了前面理论推导所得出的结论。

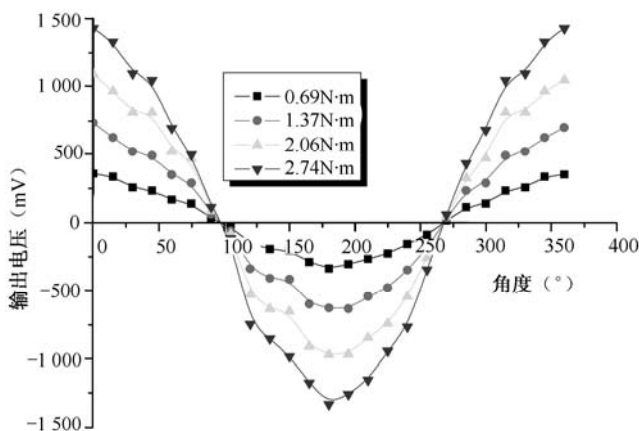


图 7-9 扭转电荷灵敏度分布规律曲线图

综上所述, 要获得最大扭转电荷灵敏度, 电极分割线需与当前坐标系的  $y$  轴重合, 即石英晶体坐标系的  $x$  轴相重合。

## 7.2 圆形石英晶片扭转效应的电荷分析法

### 7.2.1 晶片数量选择和扭矩测量晶组组成

晶组组合最重要的要求是信号转换效率最高而横向干扰最小。若要达到此目的，在准确判断晶轴的前提下，要使扭转晶组按干扰最小的方式来组合，即要尽量减小轴向力与径向力的干扰，同时又要考虑避免使用外接电路和减少电荷放大器的数量，以提高测量精度和降低成本。

降低轴向力的向间干扰是靠晶片的切型来实现的。因为理想的  $y0^\circ$  切型的晶片在轴向力作用时，机械轴方向不存在压电效应，不会产生束缚电荷。

然而  $y0^\circ$  切型晶片具有剪切压电效应，必须使扭转晶组在整体上减小径向力的向间干扰，即当径向力作用时，电极输出为零。可采用两种方法来实现。

(1) 电压法：在两片晶片中间对称粘贴两片半圆电极，分别将电极接入两部电荷放大器后，把其中一个引出接反相器后再与另一个引出线并联作为输出。这种方法要用两部电荷放大器和一个电压反相器，外接测量电路的引入必将导致测量误差的增加和制作成本的提高。

(2) 电荷法：整个扭转晶组由 3 片晶片与 4 个电极组成，当仅有径向力（任意方向）作用时，在晶体表面产生剪切束缚电荷，电极 A 与 C、B 与 D 产生的电荷符号相反，大小相等，电极 A 与 C 并联后输出为零，从而可降低径向力的影响，如图 7-10 (a) 所示。当仅有扭矩作用时，电极 A 与 C、B 与 D 产生的电荷符号相同，大小相等，电极 A 与 C 并联后输出，如图 7-10 (b) 所示。可以看出这种方法只采用一部电荷放大器而无须外接电路，而且电极输出为单电极的两倍，提高了扭转晶组的灵敏度，所以采用后一种方法。

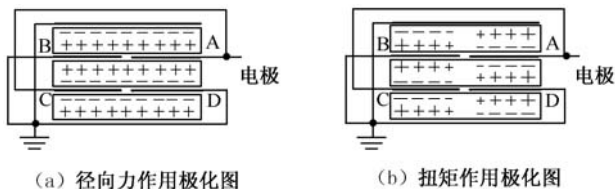


图 7-10 晶片与电极布置图

7.2.2 实验结果与分析

实验在可调轴向予载的实验台上进行，通过滑轮与砝码装置来施加扭矩，电极之间连线与晶片布置采用上述的电荷法，电荷放大器的型号为 FDH-2，数字电压表采用大连工学院生产的 SY2-III 电压表，实验测量原理图如图 7-11 所示。

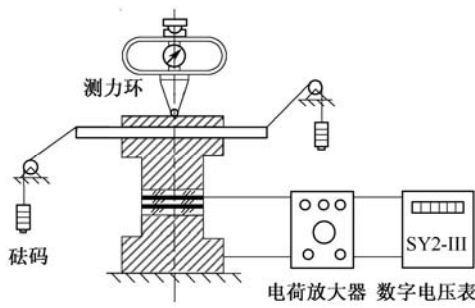


图 7-11 实验测量原理图

采用分割电极法在最大灵敏度方向布置检测电极，测得的扭矩与束缚电荷量的数据如表 7-2 所示，并示于图 7-12 中。从中可以看出电极所测量的电荷量与扭矩成线性关系。

表 7-2 扭矩与束缚电荷量的数据

扭矩 (N · mm)	输出电荷 (pC)	扭矩 (N · mm)	输出电荷 (pC)	扭矩 (N · mm)	输出电荷 (pC)
0	0	1 029	565	2 058	1 139
343	189	1 372	762	2 401	1 335
686	381	1 715	957	2 744	1 514

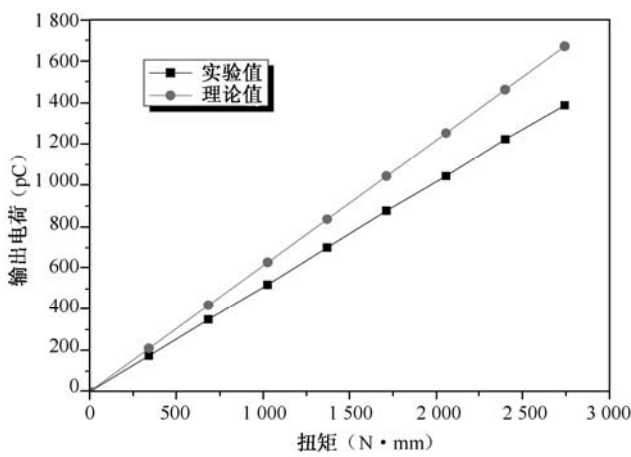


图 7-12 扭转电荷量与扭矩的关系

## 7.2.3 实验误差分析

根据石英晶片的理论推导,可知通过检测电极所检测到的电荷量为每个半圆电极所测电量的4倍。所以各个电极所检测到的电量理论值可利用式(7.1.37)通过积分计算得到。

$$Q = 4 \iint \eta_{bz+} da_{\text{电极1}} = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0_2}^r \eta_{bz+} r dr d\theta = 804.426 M_t (\text{pC}) \quad (7.2.1)$$

采用最小二乘法拟合电极所检测的电量 $q$ 同扭矩 $M_t$ 之间的线性关系。设回归直线方程为

$$q = aM_t + b \quad (7.2.2)$$

式中, $a$ 是斜率; $b$ 是截距。

根据表7-2中的实验数据求得回归直线方程为

$$q = 0.55 \times M_t + 0.09 \quad (7.2.3)$$

式中, $q$ 是检测电量,单位为pC; $M_t$ 是扭矩,单位为N·mm。上述回归方程的截距项都小于0.1 pC,因此有理由省略方程中的截距项。

根据统计假设检验的原理所进行的相关显著性检验,得到的线性相关系数为0.999 97,可以看出,扭矩与电压之间的线性相关关系非常显著。

对照式(7.2.3)和理论计算关系式(7.2.1),可求得各个电极上的感生电量实测值同理论计算值之间的相对误差为

$$EER = \left| \frac{q - Q}{Q} \right| \times 100\% = 30.97\% \quad (7.2.4)$$

实验值同理论值之间产生较大偏差主要是由石英晶片切型误差、电极的尺寸误差、电极贴放角度偏差(电极分割线与最大灵敏度轴之间的夹角偏差)、电极的平整度及加载装置误差等因素造成的。

## 7.3 基于扭转效应的扭矩传感器结构设计

压电石英扭矩传感器是一个力电转换元件,它由石英晶片装架而成,传感器的设计与制造水平将直接决定传感器技术性能的优劣。本节主要讨论晶体盒结构尺寸设计、预紧力大小计算和扭矩传感器的装架技术等。

### 7.3.1 基于扭转效应的扭矩传感器的石英晶片尺寸计算

利用正压电效应来实现力-电转换的石英晶体大多数采用圆形。石英晶片的尺寸参数主要有两个，一个是晶片的半径 $r$ ，另一个是它的厚度 $t$ ，如图7-13所示。

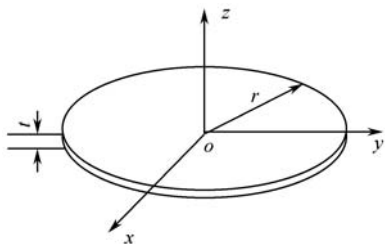


图 7-13 石英晶片的尺寸参数

确定尺寸参数的原则是，必须满足使用要求，使扭矩测量晶组既有足够的承载能力，也有较高的固有频率和绝缘阻抗。尺寸参数的确定方法一般通过实验分析进行测选。传感器的设计应该具有较大的刚度、较小的质量，以期获得较高的固有频率和良好的频率特性。从这个意义上讲，尺寸参数无论是 $r$ 还是 $t$ ，在满足要求的前提下，应尽量取得较小一些。

在实际应用中，半径是晶片的面积参数，它的大小主要取决于传感器所要求的最大承载能力，一般可粗略地按如下经验公式确定：

$$r = \sqrt{\frac{F_1}{\pi \sigma_p}} \quad (7.3.1)$$

$$F_1 = \varepsilon F_m + F_p + \Delta \quad (7.3.2)$$

式中  $F_1$ ——整个组合晶组或传感器所能承受的极限载荷；

$\sigma_p$ ——石英晶片的抗压强度极限，一般为 120 MPa 左右；

$\varepsilon$ ——过载系数，一般取 1.2~1.5；

$F_m$ ——直接作用在传感器承载面上的最大被测载荷或其当量载荷；

$\Delta$ ——考虑由于晶轴轴向标记“倒角”带来的有效承载能力的损失，晶片外圆一般倒角为  $(0.2 \sim 0.3) \times 30^\circ$ ，承载能力损失为 100~300N 不等，小片取小值，大片取大值；

$F_p$ ——传感器的预载，一般为  $(1/10 \sim 1/5) F_m$ 。

由于扭矩传感器主要承受扭矩，所承受的轴向力一般很小，只要保证一定的余量即可，选取直接作用在传感器承载面上的最大轴向载荷  $F_m = 5\,000\text{ N}$ ；选择过载系数  $\varepsilon = 1.5$ ；由于所用晶片的尺寸较小，选取  $\Delta = 100\text{ N}$ ；另外，由于扭矩传感器主要靠摩擦，所以要较大的预紧力，施加  $F_p = 15\,000\text{ N}$  的轴向预紧力。这样可以计算出传感器所能承受的极限载荷  $F_1$  为

$$\begin{aligned}
 F_l &= \varepsilon F_m + F_p + \Delta \\
 &= 1.5 \times 5\,000 + 15\,000 + 100 = 27\,600 \text{ N}
 \end{aligned}
 \quad (7.3.3)$$

将式 (7.3.3) 代入式 (7.3.1), 可求得晶片半径为

$$r = \sqrt{\frac{F_l}{\pi \sigma_p}} = \sqrt{\frac{27\,600}{3.14 \times 120}} = 9.30 \text{ mm}
 \quad (7.3.4)$$

根据式 (7.3.4) 的计算结果, 从现有的晶片中选择半径为 9.75 mm 的圆形石英晶片。

晶片厚度的确定应在晶片强度 (尤其是抗弯强度)、传感器的固有频率, 以及扭矩测量晶组或传感器所要求的绝缘阻抗这几个主要性能参数中用实验的方法进行选定。实践已证明, 从保证晶片强度 (尤其是抗弯强度)、切割方便、装架容易方面出发, 应使  $t$  大一些为好, 但从提高频响和减小传感器的高度方向的尺寸出发, 又希望把晶片适当减薄, 这一点对于小力值传感器就更为重要, 但  $t$  的减小反而会使绝缘阻抗降低。通常测力传感元件的石英晶片的厚度  $t$  一般取 0.75~1 mm 较好, 多数采用的是 0.75 mm 或 1 mm。本文中该新型扭矩传感器的晶片厚度选用  $t=1$  mm。

### 7.3.2 基于扭转效应的扭矩传感器的晶体盒尺寸计算

将选定的晶片结构化后构成扭矩测量晶组, 可以说已成为一个传感元件。但只有将它安装在晶体盒内, 并连接好电极与插头, 然后装盖封合后, 才能成为一个完整的扭矩传感器。

晶体盒是晶组的保护与屏蔽元件, 又是一个力矩的传递元件, 因此, 晶体盒对压电传感器来说是一个十分重要的组成部分, 它的结构设计必须使传感器具有高的机电转换效率、线性精度、灵敏度、固有频率以及尽量小的横向干扰。此外, 晶体盒的密封应可靠, 结构要合理, 造型要美观大方。晶体盒设计主要考虑两个方面的要素: 弹性变形膜的厚度; 立柱的高度, 如图 7-14 所示。

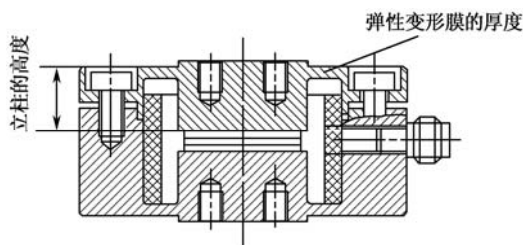


图 7-14 晶体盒结构设计要素

立柱高度的选择要充分考虑到弹性力学的局部性原理 (Saint Venant), 即若在物体任一小部分上作用一个平衡力系, 则该平衡力系在物体内部所产生的应力分布仅局限于该力系作用的附近区域, 在离该区域的相当远处, 这种影响便急剧减小。也就是说, 在物体内部距



外加载荷作用处相当远的各点, 应力与载荷具体分布情况关系很小, 载荷静力保持不变。

立柱高度的选择主要通过有限元分析来确定, 如图 7-15 所示为在一长为 20 mm 柱体的端面上施加扭矩 10 N·m 时的应力分布图。从图中可以看出, 确如圣维南原理所说的一样, 在柱体端盖处, 应力分布不是很均匀, 随着离端面距离的增加, 应力场逐渐变得均匀, 在离端面 10 mm 左右处, 应力已经均匀。因此, 同时考虑圣维南原理和有限元分析结果, 特选取立柱高度为 12 mm, 从而进行晶体盒结构设计。

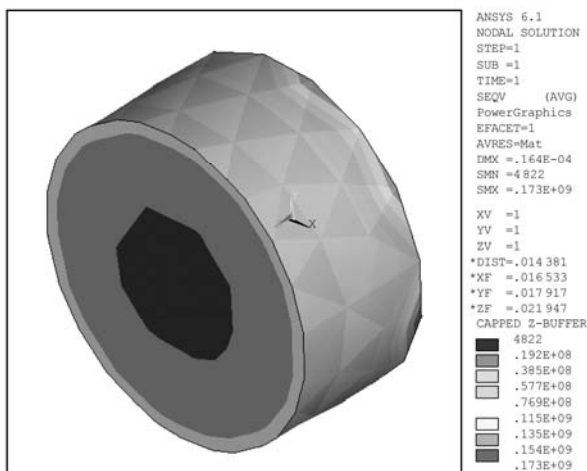


图 7-15 端面施加扭矩 10N·m 的柱体应力分布

弹性变形膜的厚度主要考虑的是它的分载作用。所谓分载是指由于弹性变形膜的存在, 使作用在扭矩测量晶组上的扭矩  $M_j$  并不是被测扭矩  $M_t$  的全部, 消耗在弹性变形环节上的扭矩  $M_m$  并不参与力电转换,  $M_m$  越大, 则  $M_j$  越小, 传感器灵敏度就越小, 力电转换效率就越低。

可将压电石英扭矩测量系统简化成如图 7-16 所示的模型, 由图可知

$$M_t = M_m + M_j$$

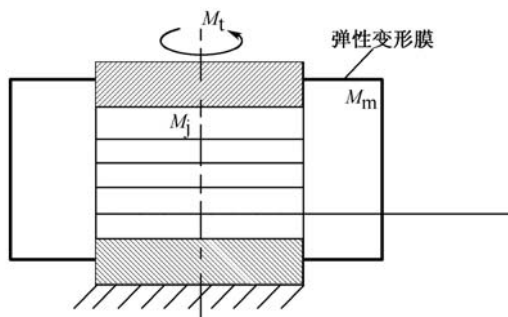


图 7-16 传感器的简化模型

式中,  $M_t$  是作用在传感器承载面上的被测扭矩;  $M_m$  是消耗在外壳弹性膜变形上的扭矩, 其扭转变形量为  $\Delta\varphi_m$ ;  $M_j$  是通过承载面作用在晶组上的扭矩, 其扭转变形量为  $\Delta\varphi_j$ 。

根据材料力学扭转基本理论可知

$$M_m = NK_m \cdot \Delta\varphi_m$$

$$M_j = NK_j \cdot \Delta\varphi_j$$

式中,  $NK_j$  是扭矩测量晶组之间的等效扭转刚度;  $NK_m$  是壳体弹性变形膜的扭转刚度。

考虑到在扭转变形时  $\Delta\varphi_m = \Delta\varphi_j$ , 可得

$$M_j = \frac{NK_j}{NK_m + NK_j} M_t \quad (7.3.5)$$

从式 (7.3.5) 可知, 只有使  $NK_m \ll NK_j$ , 才能使得  $M_j \approx M_t$ 。这样在进行传感器及晶体盒结构设计时, 务必使  $NK_j$  尽量大,  $NK_m$  尽量小。

因此, 考虑到传感器的量程, 在满足工艺条件的情况下, 应尽量减薄弹性变形环节的厚度, 但同时还应兼顾到晶体盒材料 1Cr18Ni9Ti 的强度, 在此特选择弹性变形环节的厚度为 2 mm。

根据材料力学扭转问题, 最大剪应力发生在扭转弹性体的外圆边界处, 由强度公式可知

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{10 \times 16}{3.14 \times 0.034^3} = 1.30 \text{ MPa} \quad (7.3.6)$$

由式 (7.3.6) 可以看出, 在弹性变形膜的最大剪应力为 1.30 MPa, 远小于 1Cr18Ni9Ti 材料的许用剪切强度 70 MPa, 可见所选用厚度 2 mm 是合理的。

### 7.3.3 基于扭转效应的扭矩传感器的预紧力与量程计算

检测扭矩值的大小是传感器的重要参数, 也是设计的依据。利用石英晶片的扭转效应, 主要是利用晶片与壳体之间的摩擦力, 而考虑摩擦力就不可能不涉及预紧力, 所以量程的设计与预紧力大小息息相关, 两者要同时考虑。

若沿传感器轴向施加一定的预载荷  $N$ , 则在扭矩测量晶组的结合端面上便产生了一定的摩擦力, 可求得摩擦力大小为

$$F_f = f \cdot N \quad (7.3.7)$$

式中,  $f$  是石英与金属的摩擦系数 ( $f = 0.1$ )。

由摩擦力  $F_f$  乘以摩擦力半径便得到摩擦力矩  $M_f$ 。如果忽略壳体弹性变形的话, 所得

到的摩擦力矩  $M_f$  即为所要求检测的外力矩  $M_t$ ，二者总是相等的，即  $M_f = M_t$ 。

当正压力  $N = 15\,000\text{ N}$  时，在圆周方向产生的合摩擦力为

$$F_f = f \cdot N = 0.1 \times 15\,000 = 1\,500\text{ N} \quad (7.3.8)$$

取摩擦半径为晶片半径的一半，即

$$l = r/2 \quad (7.3.9)$$

所以摩擦扭矩的计算公式为

$$M_t = n \cdot F_f \cdot l = F_f \cdot r/2 = 0.1 \times 15\,000 \times 0.009\,75/2 = 7.32\text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.3.10)$$

式中， $n$  是扭矩测量晶组数量。

另外一种计算方法为积分法，如图 7-17 所示。

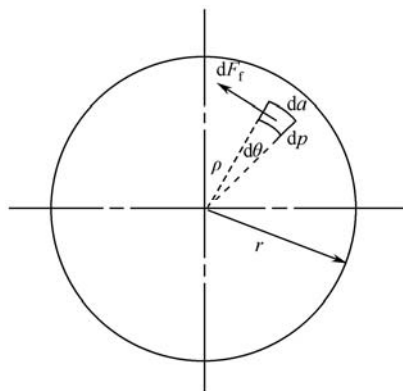


图 7-17 扭矩量程的积分确定法

$$\text{晶片表面的正应力:} \quad \sigma = N/A \quad (7.3.11)$$

$$\text{表面微元:} \quad da = \rho d\rho d\theta \quad (7.3.12)$$

则在此微元积分面元的正压力为

$$dN = \sigma \cdot da = N/A \cdot \rho d\rho d\theta \quad (7.3.13)$$

在此微元积分面元的扭矩为

$$dM_t = f \cdot dN \cdot \rho = f \cdot \frac{N}{A} \cdot \rho^2 d\rho d\theta \quad (7.3.14)$$

最后，得到总的摩擦扭矩为

$$M_t = \int_0^r \int_0^{2\pi} f \cdot \frac{N}{A} \cdot \rho^2 \cdot d\rho d\theta = \frac{2}{3} f N r = 9.75\text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.3.15)$$

由于上述两种方法都是近似法，为了减小计算方法的误差，取它们的平均值  $9\text{ N} \cdot \text{m}$  作为该扭矩传感器的量程。

另外, 还要验算轴向预紧力的大小是否超过弹性变形环节材料的强度, 这可通过有限元分析来完成。如图 7-18 所示为有限元模拟的应力图, 从图中可以看出, 弹性变形环节的最大应力不到 180 MPa, 远小于 1Cr18Ni9Ti 材料的许用应力 206 MPa, 因此施加 15 000 N 的预紧力合理。

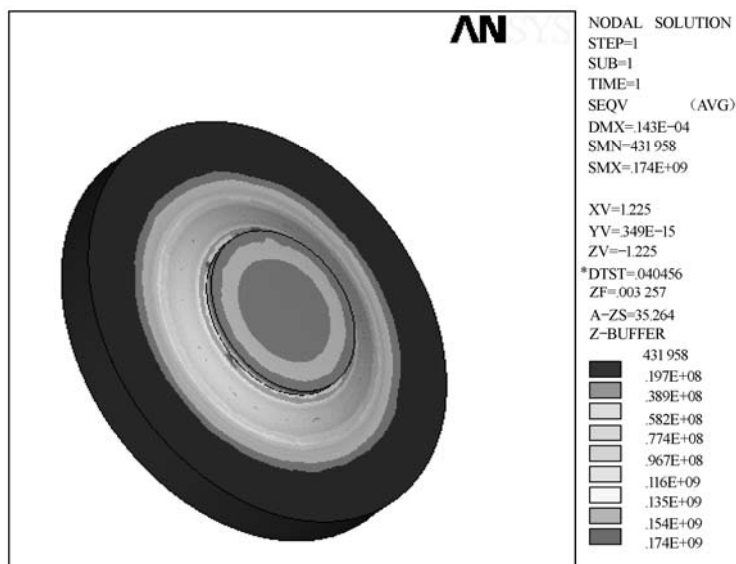


图 7-18 施加 15 000 N 预紧力端盖应力分布图

### 7.3.4 新型扭矩传感器的装配

压电石英扭矩传感器质量的好坏, 不仅与晶体转换方式的选择、晶片切角的精度、传感器的结构设计有关, 而且更重要的是与传感器的装架技术是否精密可靠, 工艺规程是否合理, 典型与重点工序是否达到要求有重大关系, 而且往往成为决定压电扭矩传感器质量高低的关键。

压电扭矩传感器的工艺特点是: 各装配组元加工质量要求很高 (在装配之前对各组元必须进行严格的检测、筛选, 特别是晶片质量), 装配过程工序较多, 工艺路线长, 从选片、备件, 直到传感器总成需要 20 道左右工序, 特别是扭矩测量晶组的构成和结构化在很大程度上决定传感器的质量, 因此这就要求具备较高的装配技术和严格的装配环境, 必须在超净和高燥的环境中完成主要工序; 必须在工具显微镜下完成所有的定向工序。此外, 在装配过程中, 为保证传感器的正常特性, 防止电荷泄漏, 必须使其极间绝缘阻抗大于  $10^{13} \Omega$ 。特别要求各装配组元在装配前, 必须经过严格清洗, 通过有机溶剂与无机溶剂的仔细清洗,

使其表面的各种杂质与污染物洗掉；经过机械加工的工作都要进行超声波清洗，这样就除去用擦拭法几乎很难去掉的微粒。在整个装配过程中要不断进行工序间的检测、修正，总成之后还要进行总检和最后的修正。传感器装配完成后，应立即移入清洁而密封的干燥器皿内，进行干燥处理。

如图 7-19 所示为扭矩传感器装配工艺路线方框图。以 $\Rightarrow$ 表示传感器装配的主要工序。

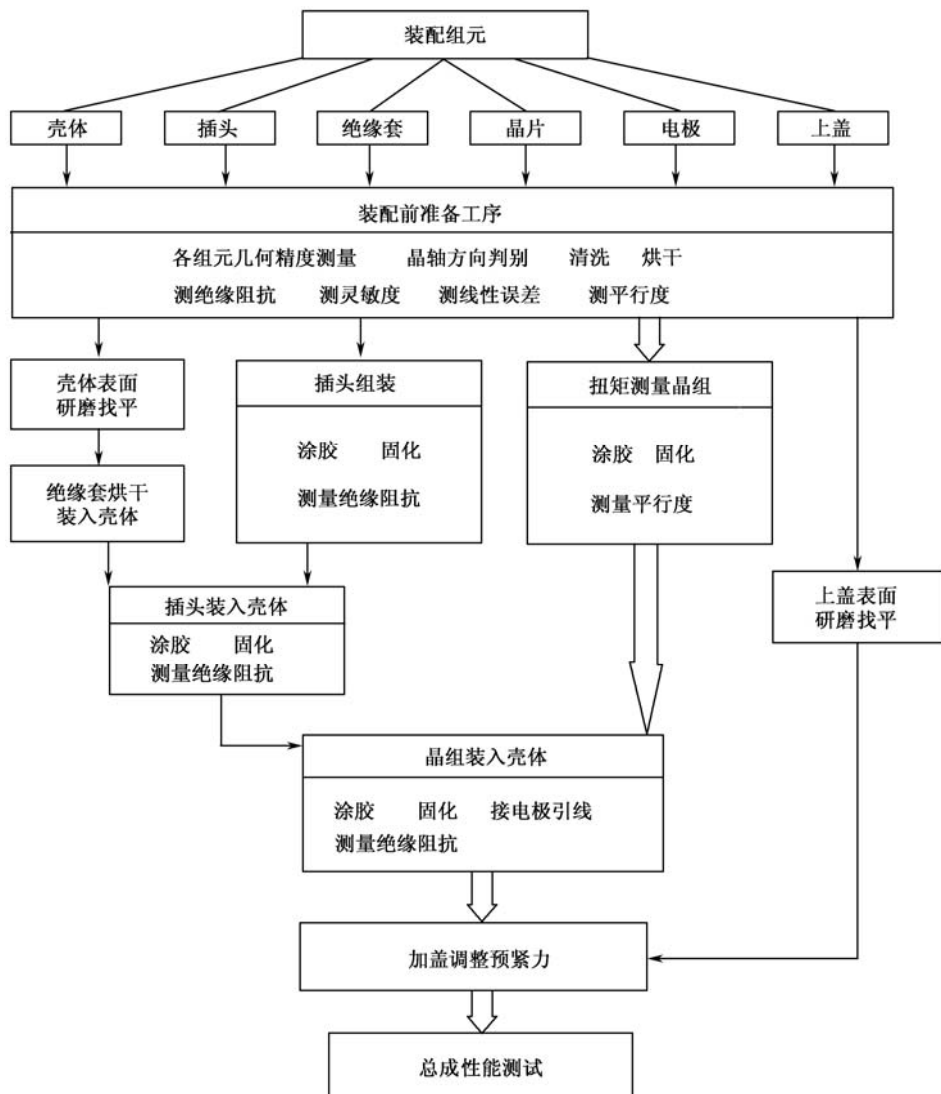


图 7-19 扭矩传感器装配工艺路线方框图

如图 7-20 所示为扭矩传感器的结构示意图, 该扭矩传感器主要由下壳体 1、聚四氟乙烯套 2、螺钉 3、上盖 4 以及扭矩测量晶组 (由 3 片具有扭转效应的  $y0^\circ$  切型的石英晶片组成) 5 和插头 6 等构成。其特征是将扭矩测量晶组贴放在上盖 4 和下壳体 1 的内腔凸台中心上, 聚四氟乙烯套 2 紧贴在下壳体 1 的内腔表面, 上盖 4 通过螺钉 3 与下壳体 1 连接在一起, 并将预紧力施加到扭矩测量晶组上。在下壳体 1 上装有插头 6, 插头与扭矩测量晶组的电极引线相连, 将产生的电荷引出, 通过电荷放大器放大并转变成电压信号由数字表读取或由计算机进行采集记录和处理。如图 7-21 所示为该扭矩传感器的实物照片。

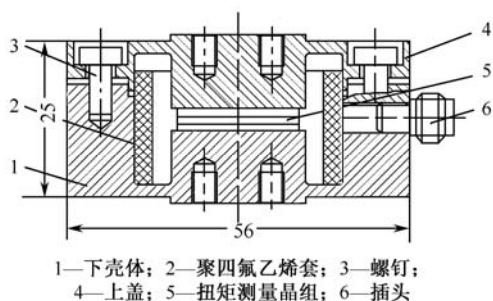


图 7-20 扭矩传感器的结构示意图



图 7-21 扭矩传感器的实物照片

## 7.4 新型扭矩传感器的性能标定

### 7.4.1 基于扭转效应的扭矩传感器的静态标定

传感器静态标定的目的是确定传感器静态特性指标, 如线性度、灵敏度、滞后和重复性等, 标定的关键工作是通过实验的方法来建立输入量和输出量之间的输入-输出实际特性曲线。

压电扭矩传感器与电荷放大器、记录显示仪表一起组成标定系统, 所以严格地说是对上述整个系统的标定, 即建立输入扭矩与输出电压的关系。扭矩标定的关键是要将一个纯扭矩 (不附加任何其他外力) 加到被标传感器的承载面上, 而且应把整个标定装置传动链中由摩擦等引起的扭矩损失降低到最低限度, 这往往需要采用专用的扭矩标定装置。本扭矩传感器的标定在自行设计的标准标定装置上进行, 标定系统原理图如图 7-22

所示。图中采用两个三级标准测力计在一定的力臂上垂直施加两个大小相等、方向相反的力来形成扭矩，传感器的输出信号经 FDH-2 型电荷放大器放大后，由数字电压表直接显示电压值。

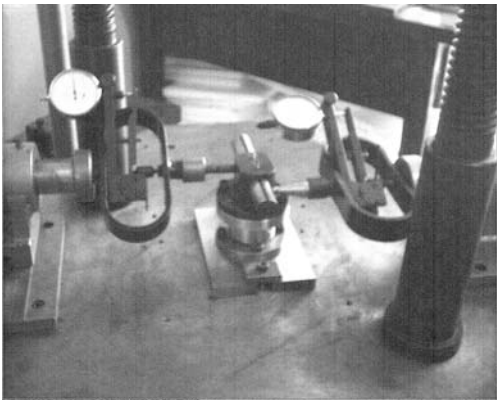


图 7-22  标定系统原理图

扭矩传感器的标定结果如表 7-3 所示，各项指标按满量程法计算，如图 7-23 所示为标定曲线。经计算可知传感器的线性度与重复性均小于 1%，标定结果表明，该扭矩传感器的各项静态指标已达到了 CIRP-STCC(国际生产工程研究会-切削科学技术委员会)规定的标准。

表 7-3  扭矩传感器静态标定数据表

扭矩 (N·m)	输出电压 (mV)			平均值 (mV)	理论值 (mV)	线性度 (%) FS	重复性 (%) FS
0	0	0	0	0	0	0.77	0.87
1	50	50	50	50	51.11		
2	98	98	100	99.67	102.22		
3	151	148	150	149.67	153.33		
4	202	200	202	201.33	204.44		
5	251	254	251	252	255.56		
6	305	305	305	305	306.67		
7	355	355	355	355	357.78		
8	406	405	408	406.33	408.89		
9	460	460	460	460	460		

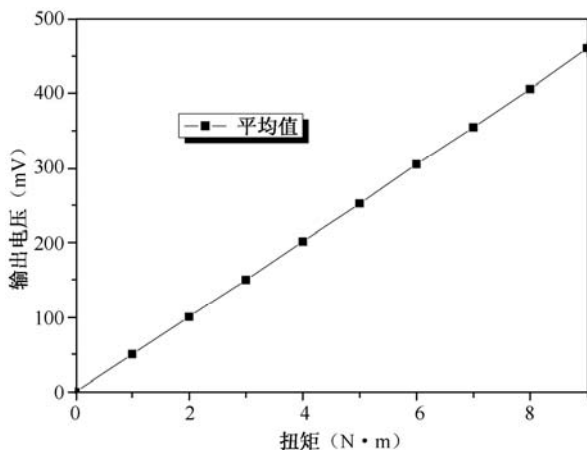


图 7-23 扭矩传感器的标定曲线

从图 7-23 可以看出，该扭矩传感器具有良好的线性，测量范围为  $0 \sim 9 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，为了应用方便，数据取截距为零进行线性回归，得到的结果为

$$V = 50.7695 \times M_t \quad (7.4.1)$$

根据统计假设检验的原理进行相关显著性检验，得到的线性相关系数为 0.999 96，可以看出，扭矩与输出电压之间的线性相关关系极其显著，该取截距为零的线性关系合理。

## 7.4.2 基于扭转效应的扭矩传感器的动态标定

传感器的动态标定主要是研究传感器的动态响应性能指标，一般是传感器的幅频特性与相频特性。根据幅频、相频特性及动态信号的不失真测量条件可以确定传感器的工作频带，即传感器的使用频率范围。因此频率响应特性是正确使用传感器必不可少的依据。对压电传感器来说，动态响应有关的参数主要是固有频率  $\omega_n$ 。

动态标定的方法常用的主要有冲击响应法、频率响应法和阶跃响应法。因实验条件所限，只做了传感器的幅频响应。但必须指出，即使幅频平坦，但如果相频非线性，仍会引起幅值测量误差。

压电扭矩传感器固有频率测试系统如图 7-24 所示。测试方法采用简单易行、测试精度高的钢球冲击法。测试过程为：由压电加速度传感器测出钢球对压电传感器的时间响应，电荷放大器将压电加速度传感器输出的电荷信号转换为电压信号并进一步放大，电荷放大器的输出信号分为两路，一路输入示波器，用于观察信号的时域波形，另一路输入结构动态分析仪，对时域信号进行 FFT 分析，绘图仪在结构动态分析仪分析的同时绘出信号的频谱。测试系统中各仪器的详细情况如表 7-4 所示，传感器的频率响应特性曲线如图 7-25 所示。



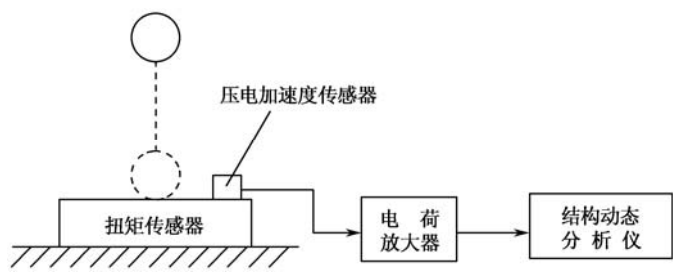
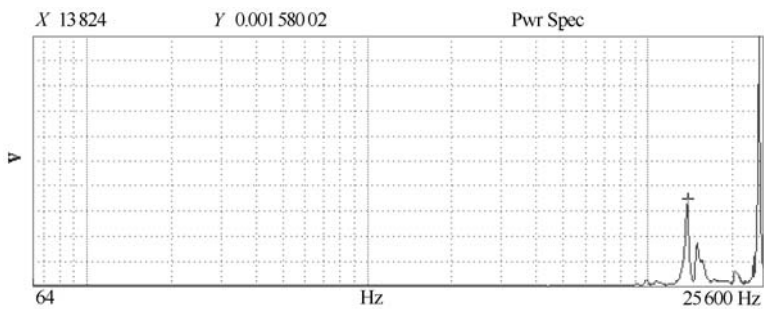


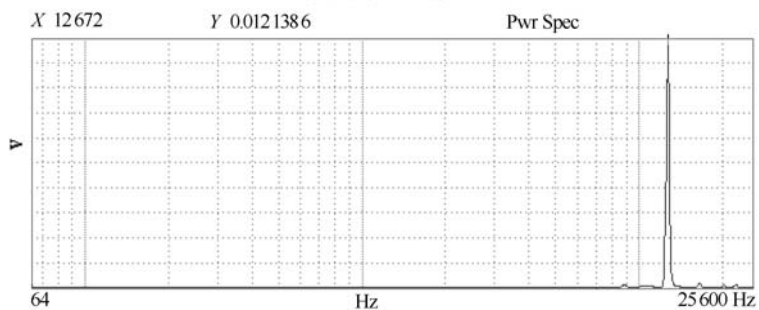
图 7-24 压电扭矩传感器固有频率测试系统

表 7-4 压电扭矩传感器固有频率测试系统中各仪器的情况

名 称	型 号	性 能 指 标	制 造 商
压电加速度传感器	B&K4371	频响：38 kHz	丹麦 B&K 公司
电荷放大器	B&K2626	频响：0.3~100 kHz	丹麦 B&K 公司
结构动态分析仪	HP35670A	分析频率：51.2 kHz 分析速率：16 b 内抗混：-90 dB	美国 HP 公司



(a) 轴向频率响应特性曲线



(b) 径向频率响应特性曲线

图 7-25 传感器的频率响应特性曲线

从图 7-25 中可以看出,该扭矩传感器轴向第一阶固有频率 $\omega_a=13.824\text{ kHz}$ ,径向第一阶固有频率 $\omega_r=12.672\text{ kHz}$ 。一般压电式传感器可以测量到测量系统的第一阶固有频率的一半左右。实际上,由于压电加速度传感器也具有一定的质量,将产生负载效应,所以压电扭矩传感器的实际固有频率要比上述测试结果略高。

### 7.4.3 基于扭转效应的扭矩传感器的横向干扰测定

表 7-5 列出了在不同方向、不同大小径向力作用下传感器的输出。从表中可以看出,在相同载荷作用下,当径向力方向变化时,传感器的输出电压并没有发生明显的变化,从而得知该扭矩传感器输出的电荷量与径向力的方向无关。将表 7-5 中的数值与传感器的标定结果中的数据对比可知,径向力对扭矩的横向干扰最大值小于  $0.030\text{ N}\cdot\text{m/N}$ 。所以可以断定该传感器只对扭矩敏感,能够避免径向力的干扰,横向干扰满足扭矩传感器制作与使用要求。

表 7-5 不同方向不同大小径向力作用下电极所测量电荷量

径向力 (N)	电荷量 (pC)				
	0°	30°	45°	60°	90°
0	0	0	0	0	0
9.7	7.3	10	5	7.3	15
19.6	20	20	5	15	30
29.4	36.7	30	5	20	46.7
39.2	55	35	5	30	61.7

注: 0°、30°、45°、60°、90° 为径向力方向与 y 轴之间的夹角。

## 7.5 新型扭矩传感器在钻削测量中的应用

本节用自行研制的扭矩传感器对钻削中的扭矩进行实验测定,建立扭矩的经验公式,从而对钻削中的扭矩进行预报,同时也是对该新型扭矩传感器在实际应用中的一次全面的性能检定。

### 7.5.1 实验测量系统

钻削中扭矩测量系统实验工作台如图 7-26 所示,图 7-27 所示为扭矩测量的软件数据采集系统。从扭矩传感器输出的电荷信号经 FDH-2 型电荷放大器后,由 SY2-III 型数字电压表转换为电压信号,用电子计算机记录实际钻削中的扭矩信号,并进行分析。



图 7-26 钻削中扭矩测量系统实验工作台

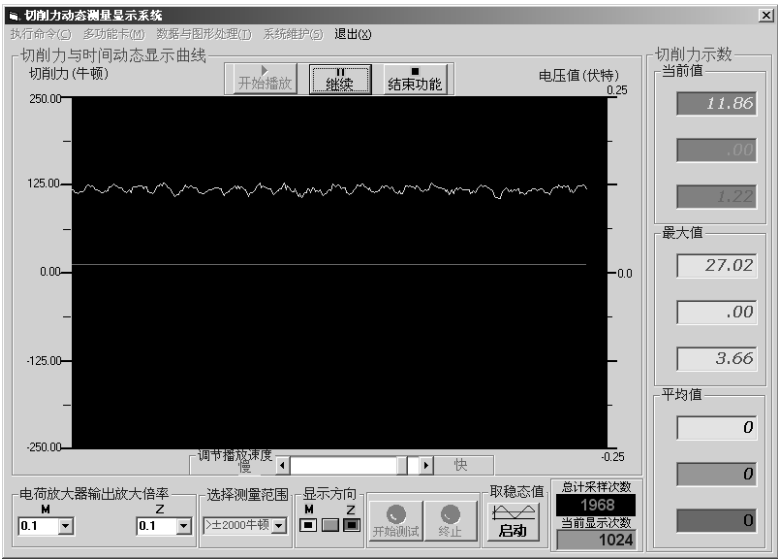


图 7-27 软件数据采集系统

### 7.5.2 实验设计

为了以尽可能少的实验次数获得尽可能多的实验信息，采用正交实验法来设计实验方案。首先根据实验目的确定实验指标及影响因素。在本次切削实验中，实验指标为：钻削

中的扭矩  $M_t$ 。实验因素为：

- (1) 钻头直径  $d$  ；
- (2) 进给量  $f$ ；
- (3) 钻床的转速  $n$ 。

因此该实验是一个多因素单指标实验。

其次，根据常用的切削用量及新型传感器的量程选择各因素水平，如表 7-6 所示。钻削实验中实验材料选用 45 钢。

表 7-6 因素水平表

因 素 水 平	钻头直径 $d$ (mm)	进给量 $f$ (mm/r)	钻床的转速 $n$ (r/min)
1	7	0.13	280
2	8	0.21	400
3	10	0.33	590

最后，根据选定的因素水平表，选用  $L_9(3^4)$  正交表来设计实验方案，如表 7-7 所示，其中表的每一行对应一个实验条件，这样共需进行 9 次实验。

表 7-7 实验方案与实验结果表

列 号		1	2	3	实 验 结 果
实 验 号		钻头直径 $d$ (mm)	进给量 $f$ (mm/r)	钻床的转速 $n$ (r/min)	扭矩测量值 (N · mm)
1		1 (7)	1 (0.13)	3 (590)	2 053
2		2 (8)	1	1 (280)	3 018
3		3 (10)	1	2 (400)	4 327
4		1 (7)	2 (0.21)	2 (400)	3 053
5		2 (8)	2	3 (590)	3 806
6		3 (10)	2	1 (280)	7 575
7		1 (7)	3 (0.33)	1 (280)	4 620
8		2 (8)	3	2 (400)	5 120
9		3 (10)	3	3 (590)	8 300
$T_{j1}$	扭矩	9 726	9 398	15 213	
$T_{j2}$	扭矩	11 944	14 434	12 500	
$T_{j3}$	扭矩	20 202	18 040	14 159	
$R_j$	扭矩	10 476	8 642	2 713	

### 7.5.3 实验结果与分析

#### 1. 钻削扭矩波形分析

如图 7-28 所示为选择钻削 45 钢（钻头直径 8 mm，进给量 0.33 mm/r，钻床转速为 400 r/min）时的扭矩时域动态波形，如图 7-29 所示为其相应的频域分析结果。

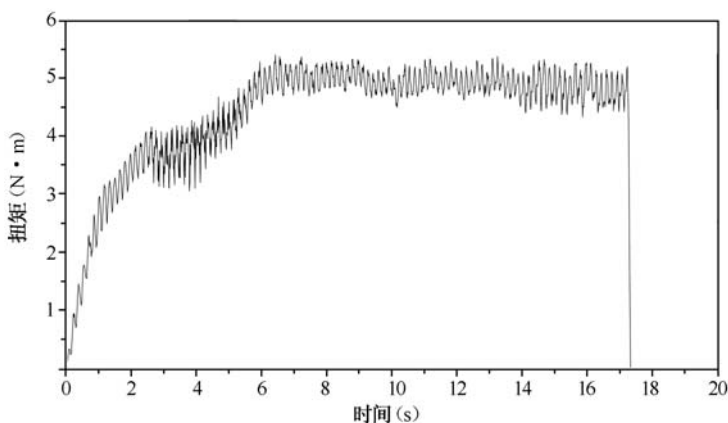


图 7-28 选择钻削 45 钢时的扭矩时域分析结果

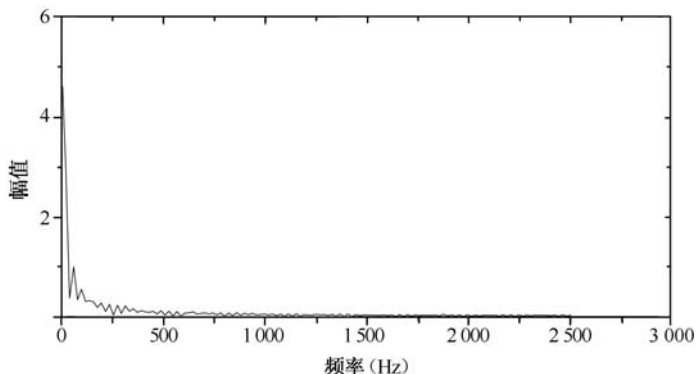


图 7-29 选择钻削 45 钢时的扭矩频域分析结果

根据图 7-28 中所示波形的特点，可将钻削过程分成 3 个阶段：

（1）切入阶段：该阶段扭矩由 0 逐渐上升到稳定值，波形曲线的斜率很大；

(2) 稳定钻削阶段：该阶段扭矩基本稳定，但存在高频振荡分量；

(3) 切出阶段：钻削基本完成，扭矩突然减小，直至为 0。

但无论在哪个阶段，钻削扭矩都由稳态分量与动态分量两部分组成，其稳态分量大小取决于切削用量，其动态分量是典型的稳态随机信号，它除取决于切削用量外，还与工艺系统和测试系统的动态品质有关。图 7-29 所示反映了钻削过程中能量在各频带的分布，可见在钻削过程中，主要消耗的能量几乎都存在于 500 Hz 以下，而高频振荡分量所消耗的能量很小。

## 2. 实验数据的极差分析

将 9 次正交实验得到的实验结果记录在表 7-7 中。对于实验结果，用  $T_{jk}$  表示第  $j$  列因素水平  $k$  的 3 次实验指标之和，用  $\bar{T}_{jk} = T_{jk} / 3$  表示第  $j$  列因素水平  $k$  的 3 次实验指标的平均数，用  $R_j$  表示极差，其定义为

$$R_j = \max_{1 \leq k \leq 3} \{T_{jk}\} - \min_{1 \leq k \leq 3} \{T_{jk}\} \quad (7.5.1)$$

对钻削实验结果进行极差计算后结果见表 7-7。

用极差分析的结果可以判明各实验因素对钻削中扭矩影响的主次顺序，某因素的极差越大，说明它对实验指标影响越大，则它就是主要因素，反之则为次要因素。从表 7-7 可知，由于极差  $R_1 > R_2 > R_3$ ，所以影响钻削中扭矩因素的主次顺序为： $d > f > n(v)$ 。

## 3. 实验数据的方差分析

上面对实验数据的分析，不论是直接分析波形还是计算分析，都是直观上的分析。尽管从样本极差  $R$  的大小能找出各因素的主次关系，但不能给出一个判断标准，也不能估计实验误差的大小，所以必须进行方差分析。

方差分析是基于变异分析的原理进行的，它采用的方法是从总离差平方和中分解出可追溯到指定来源的部分离差平方和，即将样本的总离差分解成如下两部分：

$$SS_t = SS_e + SS_f \quad (7.5.2)$$

式中， $SS_t$  是总离差平方和； $SS_e$  是随机离差平方和； $SS_f$  是因素离差平方和，它反映了各个总体均值之间的差异。通过比较随机离差平方和与因素离差平方和的大小，来检验多个样本总体的均值是否相等，确定因素的显著性。

对表 7-7 中的实验数据采用 SPSS 软件中的 General Linear Model 中的 Univariate 模块来进行多因素方差分析，结果如表 7-8 所示。

表 7-8 实验数据的方差分析表

方 差 来 源	平 方 和	自 由 度	均 方	<i>F</i> 值	<i>P</i> 值	显 著 性
模型	228933034.444	7	32704719.206	87.341	0.011	
钻头直径	20317851.556	2	10158925.778	27.130	0.036	**
进给量	12560966.222	2	6280483.111	16.773	0.056	*
转速	1247062.889	2	623531.444	1.665	0.375	
误差	748897.556	2	374448.778			
总和	229681932.00	8				
<i>F</i>	$F_{0.05}(2,2)=19.00$		$F_{0.1}(2,2)=9.00$			

注：\*表示显著，\*\*表示高度显著。

从表 7-8 中可知，钻削过程中转速 *v* 因素对扭矩影响不显著，进给量 *f* 因素对扭矩影响显著，而钻头直径 *d* 因素对扭矩影响高度显著，可见，此分析结果与极差分析相一致。

## 第 8 章

# 方形石英晶片扭转效应研究

由于传感器中大量采用方形石英晶片，故本章以方形石英晶片为研究对象，对其扭转产生的束缚电荷密度、扭转极化电场分布、扭矩测量晶组构成，以及利用此效应组成三向钻削测力仪进行研究。

### 8.1 方形石英晶片扭转效应数值计算

方形压电石英晶片扭转效应研究的是方形石英晶片在外加扭矩作用下，晶片内部产生扭转应力及束缚电荷的过程。

#### 8.1.1 扭转应力计算

考虑一直线型均匀各向异性材料的正方内带圆孔形片，其中一个端面固定，另一个端面作用一个扭矩，扭矩方向与端面方向一致。将笛卡儿坐标系圆点选在固定端面中心， $z$  轴沿圆孔的轴线方向， $x$ 、 $y$  轴平行于正方形的两垂直边。实验采用截面为正方片内有一直径  $2R=13\text{mm}$  的圆右旋  $\alpha$  石英晶片，边长  $a=21\text{mm}$ ，厚度  $t=1\text{mm}$ 。石英晶片的晶体坐标系为  $Ox'y'z'$ ，计算坐标系为  $Oxyz$ ，如图 8-1 所示。



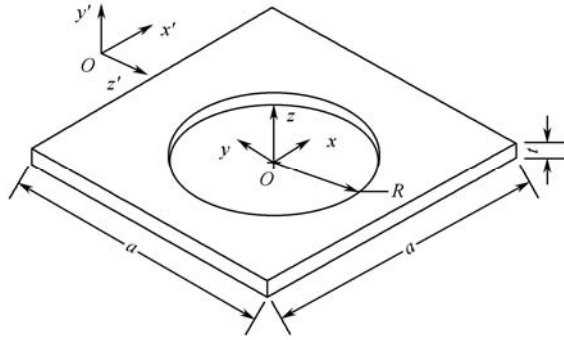


图 8-1 计算坐标系与晶体坐标系

对于当前石英晶片扭转问题，因为石英晶体的弹性对称面垂直于晶体坐标系  $x$  轴，当前石英晶片的弹性对称面不与横截面重合，即这种情况是各向异性空间扭转问题。此时石英晶片扭转问题的平面应力函数  $F(x, y)$  和扭转应力函数  $\phi(x, y)$  应满足微分方程式 (8.1.1)、式 (8.1.2) 和边界条件式 (8.1.3)、式 (8.1.4)。

$$\left. \begin{aligned} L_4 F + L_3 \phi &= 0 \\ L_3 F + L_2 \phi &= -2\vartheta + \frac{M_t}{2s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.1.1)$$

式中的微分算子为

$$\left. \begin{aligned} L_4 &\equiv \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3 &\equiv -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 &\equiv \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \phi|_{\Gamma} = 0 \quad (8.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \iint \tau_{xz} dx dy &= 0, \iint \sigma_z y dx dy = 0 \\ \iint \tau_{yz} dx dy &= 0, \iint \sigma_z x dx dy = 0 \\ \iint \sigma_z dx dy &= 0, \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M_t \end{aligned} \right\} \quad (8.1.4)$$

式中， $I_1$ 、 $I_2$  是横截面对  $x$  轴和  $y$  轴的主惯性矩； $s_{ij}$  是弹性顺度常数； $M_t$  是扭矩； $\beta_{ij}$  是折

减柔度系数，且  $\beta_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}}$ ， $i, j=1, 2, 4, 5, 6$ 。

对于实验所用方形石英晶片, 由边界条件式 (8.1.3) 的前两式  $\partial F / \partial x = 0$ ,  $\partial F / \partial y = 0$  可得

$$F(x, y) = C = 0$$

在边界上  $\phi = 0$ , 且

$$\beta_{44} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} = -2 \quad (8.1.5)$$

$$\phi(x, y) = \left[ \vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \bar{\phi}(x, y) \quad (8.1.6)$$

即满足

$$\beta_{44} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} = -2 \left[ \vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \left( \frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \quad (8.1.7)$$

其中

$$s_{34} = -4.5 \times 10^{-12}$$

$$s_{35} = 0$$

$$s_{33} = 12.77 \times 10^{-12}$$

$$\beta_{44} = s_{44} - \frac{s_{43} \cdot s_{43}}{s_{33}} = 18.454 \times 10^{-12}$$

$$\beta_{45} = s_{45} - \frac{s_{43} \cdot s_{53}}{s_{33}} = 0$$

$$\beta_{55} = s_{55} - \frac{s_{53} \cdot s_{53}}{s_{33}} = 29.12 \times 10^{-12}$$

$$I_1 = I_2 = I = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi R^4}{4} = 1.4805 \times 10^{-8}$$

设应力函数为

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.8)$$

$$\frac{\beta_{44}}{\beta_{55}} = g \quad (8.1.9)$$

则由式 (8.1.7) 得

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{2}{\beta_{55}} \left[ \vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \cdot \frac{s_{34}^2}{I} \right] \quad (8.1.10)$$

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{8}{\beta_{55}\pi} \left[ g - \frac{M_t}{4s_{33}} \cdot \frac{s_{34}^2}{I} \right] \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.11)$$

将式 (8.1.8) 代入式 (8.1.11) 得

$$Y_m'' - \left( \frac{m\pi\mu}{a} \right)^2 Y_m = -\frac{8}{\beta_{55}m\pi} \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \quad (8.1.12)$$

其一般解为

$$Y_m = C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{a} y + D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi\mu}{a} y + \frac{8a^2}{\beta_{44}m^3\pi^3} \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \quad (8.1.13)$$

根据边界条件  $y = \pm \frac{a}{2}$ ,  $\Phi = 0$  的对称性要求可得

$$D_m = 0, \quad C_m = -\frac{8a^2 \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I_2} \right)}{\beta_{44}m^3\pi^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{2}} \quad (8.1.14)$$

$$Y_m = -\frac{8a^2 \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I_2} \right)}{\beta_{44}m^3\pi^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{2}} \operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{a} y + \frac{8a^2}{\beta_{44}m^3\pi^3} \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \quad (8.1.15)$$

则

$$\phi = -\frac{8a^2 \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right)}{\beta_{44}\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{a} y}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{2}} \right) \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.16)$$

由于截面的多连通性, 设应力函数在外边界上为 0, 在内边界为待定常数  $k$ , 内边界所围面积为  $A$ , 则

$$\begin{aligned} k &= \phi(x, y) \Big|_{x^2+y^2=R^2} \\ &= \frac{8a^2 \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right)}{\beta_{44}\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{a} y}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\mu}{2}} \right) \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \\ &= 1.7856 \times 10^6 \left( g - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

可得

$$2kA = 2k\pi R^2 = 474.0167 \left( \vartheta - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \quad (8.1.18)$$

将式 (8.1.16) 积分可得

$$2 \iint \phi dx dy = \frac{32a^4 \left( \vartheta - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right)}{\pi^4 g \beta_{55}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left( 1 - \frac{2}{m\pi\mu} \operatorname{th} \frac{m\pi\mu}{2} \right) = 1150.796 \left( \vartheta - \frac{M_t s_{34}^2}{4s_{33}I} \right) \quad (8.1.19)$$

由多连通边界条件  $M_t = 2 \iint \phi dx dy + 2kA$  得

$$\vartheta = 6.4223 \times 10^{-4} M_t \quad (8.1.20)$$

由式 (8.1.16)、式 (8.1.20) 得

$$\phi = 3.7946 \times 10^3 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.21)$$

最终得到正方形内带圆孔石英晶片扭转问题的扭转应力函数为式 (8.1.21)，将石英晶片的参数代入式 (8.1.21)，并应用应力函数定义中的表达式 (3.2.29)、式 (3.3.46) 和式 (3.3.48)，可求得相应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (8.1.22)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (8.1.23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8.1.24)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -5.6767 \times 10^5 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \cos \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.25)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -4.5190 \times 10^5 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.26)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M_t}{2s_{33}} \left( \frac{s_{34}}{I_2} x - \frac{s_{35}}{I_1} y \right) - \frac{1}{s_{33}} (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) \\ &= -1.1901 \times 10^7 M_t x + 2.004 \times 10^5 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\text{ch} 2.5my/a}{\text{chl} 2.5m} \right) \cos \frac{m\pi(2x+a)}{2a}\end{aligned}\quad (8.1.27)$$

从以上求解结果可以看出, 对于各向异性正方形内带圆孔晶片的扭转问题, 存在  $\tau_{yz}$  和  $\tau_{zx}$  两个应力分量, 由于弹性对称面与横截面成斜交, 就产生了平面应力函数  $F(x,y)$  与扭转应力函数  $\phi(x,y)$  相互耦合时的基本微分方程, 即使端面仅有扭矩作用, 在扭矩作用下也会产生扭转变形, 同时其截面将发生翘曲, 产生弯曲与扭转相互耦合的现象。

### 8.1.2 束缚电荷密度计算

在晶体坐标系下的压电应变常数为  $d_{11}=2.31$  (pC/N),  $d_{14}=-0.727$  (pC/N)。当坐标系旋转时, 在当前计算坐标系下, 压电应变系数张量也要进行坐标变换, 根据压电应变系数的变换关系

$$[d'] = [A][d][N'] \quad (8.1.28)$$

可求得在当前坐标系下的压电应变系数为

$$[d'] = \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & -2.31 & 0.727 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.62 & -0.727 \end{pmatrix} (\text{pC/N}) \quad (8.1.29)$$

将式 (8.1.22) ~ 式 (8.1.27) 代入压电方程式 (8.1.29), 即可计算出电极化强度的分量为

$$\begin{aligned}p_x &= d_{13}\sigma_z + d_{14}\tau_{yz} + d_{15}\tau_{xz} = 0.727\tau_{yz} \\ &= -4.1270 \times 10^5 M_t \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\text{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\text{chl} 2.5m} \right) \cos \frac{m\pi(2x+a)}{2a}\end{aligned}\quad (8.1.30)$$

$$p_y = d_{23}\sigma_z + d_{24}\tau_{yz} + d_{25}\tau_{xz} = 0 \quad (8.1.31)$$

$$\begin{aligned}p_z &= d_{33}\sigma_z + d_{34}\tau_{yz} + d_{35}\tau_{xz} = -4.62\tau_{xz} \\ &= 2.0878 \times 10^6 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\text{sh} \frac{2.5m}{a} y}{\text{chl} 2.5m} \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a}\end{aligned}\quad (8.1.32)$$

对压电晶片极化进行分析, 可以求得由扭转极化而产生的等效极化电荷的体密度为

$$\begin{aligned}\rho_b &= -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \\ &= 6.174 0 \times 10^7 M_t \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.33)\end{aligned}$$

在垂直于  $x$  轴的晶体表面上, 扭转产生的等效面束缚电荷密度用  $\eta_{bx+}$ 、 $\eta_{bx-}$  表示 (下标 “ $x+$ ” 和 “ $x-$ ” 分别表示平面外法线指向  $x$  轴的正向与负向); 同理, 在垂直于  $y$  轴和  $z$  轴的晶体表面上, 扭转产生的等效面束缚电荷密度用  $\eta_{by+}$ 、 $\eta_{by-}$  和  $\eta_{bz+}$ 、 $\eta_{bz-}$  表示, 则

(1) 上截面  $z=0.001\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{0,0,e_z\}$

$$\eta_{bz+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_z \Big|_{z=0.001} = 2.087 8 \times 10^6 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.34)$$

(2) 下截面  $z=0\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{0,0,-e_z\}$

$$\eta_{bz-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_z \Big|_{z=0} = -2.087 8 \times 10^6 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \sin \frac{m\pi(2x+a)}{2a} \quad (8.1.35)$$

(3) 左截面  $z=-0.010 5\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{-e_x,0,0\}$

$$\eta_{bx-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_x \Big|_{z=-0.010 5} = 4.127 0 \times 10^5 M_t \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \quad (8.1.36)$$

(4) 右截面  $z=0.010 5\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{e_x,0,0\}$

$$\eta_{bx+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_x \Big|_{z=0.010 5} = 4.127 0 \times 10^5 M_t \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2.5m}{a} y}{\operatorname{ch} 1.25m} \right) \quad (8.1.37)$$

(5) 前截面  $y=-0.010 5\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{0,-e_y,0\}$

$$\eta_{by-} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P_y \Big|_{y=-0.010 5} = 0 \quad (8.1.38)$$

(6) 后截面  $y=0.010 5\text{m}$  处,  $\mathbf{n}=\{0,e_y,0\}$

$$\eta_{by+} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_y \Big|_{y=0.010 5} = 0 \quad (8.1.39)$$

### 8.1.3 检测电极布置

此切型的石英晶片在  $y$  轴方向没有极化现象, 对于用于提取电荷的上截面来说 (见式 (8.1.34)), 电荷密度以  $x$  轴为对称轴对称分布, 大小相等, 正负相反。若利用分割电极法, 以  $x$  轴为分界线分布两半片电极分别提取电荷, 如图 8-2 所示。

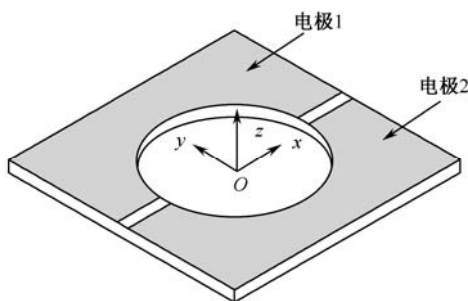


图 8-2 电极布置

则两片电极片分别提取的极化电荷为

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \iint \eta_{bz+} da_{\text{电极1}} \\
 &= \left( \int_{-0.0105}^{0.0105} dx \int_0^{0.0105} \eta_{bz+} dy - \int_{-0.0065}^{0.0065} dx \int_0^{\sqrt{0.0065^2 - x^2}} \eta_{bz+} dy \right) \\
 &= 79.529 M_t (\text{pC})
 \end{aligned} \tag{8.1.40}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \iint \eta_{bz+} da_{\text{电极2}} \\
 &= \left( \int_{-0.0105}^{0.0105} dx \int_{-0.0105}^0 \eta_{bz+} dy - \int_{-0.0065}^{0.0065} dx \int_{\sqrt{0.0065^2 - x^2}}^0 \eta_{bz+} dy \right) \\
 &= -79.529 M_t (\text{pC})
 \end{aligned} \tag{8.1.41}$$

由此可见两片电极片分别提取的极化电荷量大小相等、正负相反, 且与扭矩  $M_t$  成线性关系。

## 8.2 三向压电钻削测力仪结构设计

三向压电钻削测力仪由压电石英晶组装架而成, 本节主要讨论测扭矩、测力晶组的组成, 测力仪外壳的结构设计, 横向干扰的分析, 预紧力大小和量程的确定, 以及测力仪灵敏度的计算, 最后制造出该新型三向压电钻削测力仪, 并对三向压电钻削测力仪进行动态分析。

### 8.2.1 石英测量晶组方案选择

三向压电钻削测力仪的测量晶组是为了检测轴向力、径向力和扭矩，采用不同切型晶片构成的晶片组合，它是力电转换元件最基本的单元，也是测力仪的核心组件。

#### 1. 轴向力测量晶组

晶组组合最重要的要求是信号转换效率最高，而横向干扰最小。对于利用石英的纵向效应和剪切效应原理组成的测力仪，一般都采用同一切型的两片晶片构成一个单元晶组，如图 8-3 所示。测轴向力是采用完全相同的两片  $x0^\circ$  晶片对装，即在电路上为并联结构，把电极夹在两片中间，引出信号。对装的原则是：应使引出的信号为负电荷，两片晶片的  $y$  轴相互错开一些角度。

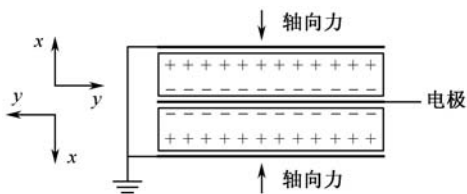


图 8-3 轴向力测量晶组

#### 2. 扭矩和径向力测量晶组

对于利用石英晶片的扭转效应来测量扭矩的单元晶组，在准确判断晶轴的前提下，根据计算分析可知，测扭矩的晶片为  $y0^\circ$  切型。利用分割电极的方法，即两半电极以  $x$  轴为分界线，分别贴在晶片表面，两片  $y0^\circ$  切型石英晶片进行对装来提取正负电荷，如图 8-4 所示。当扭矩  $M_t$  单独作用于测力仪上时，电极 1 和电极 2 上输出的电荷分别为  $Q_M$  和  $-Q_M$ 。由于  $y0^\circ$  切型的单元晶组同时具有剪切效应，所以采用  $d_{26}$  转换的  $y0^\circ$  切型的单元晶组同时可以测径向力的大小。当径向力  $F_x$  单独作用于测力仪上时，电极 1 和电极 2 上输出的电荷均为  $Q_F$ 。 $y0^\circ$  切型的单元晶组既测扭矩又测径向力，当径向力和扭矩同时作用于测力仪上时，电极 1 的输出电荷为  $Q_F + Q_M$ ，而电极 2 上的输出电荷则为  $Q_F - Q_M$ 。电荷输出之后需要进行电荷分离，即把电极 1 和电极 2 的输出结果相加为  $2Q_F$ ，可求得作用径向力的大小，而将电极 1 的输出与电极 2 的输出相减为  $2Q_M$ ，可求得作用扭矩的大小。

#### 3. 三向钻削测力仪组合晶组

有了扭矩和径向力测量晶组及轴向力测量晶组后，可以得到三向钻削测力仪的测量晶组，如图 8-5 所示。



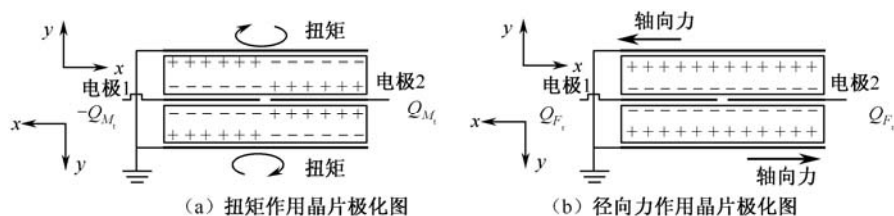


图 8-4 扭矩和径向力测量晶组

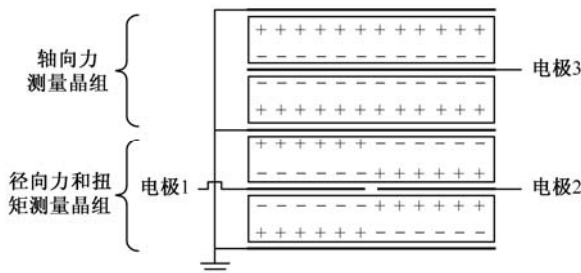


图 8-5 三向钻削测力仪测量晶组

### 8.2.2 三向压电钻削测力仪壳体设计

将选定的晶片结构化后构成测量晶组，可以说已成为一个传感元件。将它安装在测力仪壳体内，并连接好电极与插头，然后装盖封合后，便可成为一个完整的测力仪。测力仪壳体是晶组的保护与屏蔽元件，又是一个力和力矩的传递元件，因此，测力仪壳体对压电测力仪来说是一个十分重要的组成部分，它的结构设计必须使测量晶组具有高的力电转换效率、线性精度、灵敏度、固有频率以及尽量小的横向干扰。对于压电测力仪，根据其特点与使用要求，其结构设计最好满足下面的要求。

(1) 结构刚性：为了满足动态力测试需要，三向压电钻削测力仪的刚性一定要好，而且各向刚性最好相近，构成零件数和结合面数越少越好，在满足刚度的要求下，构件越轻越好，最好是整体结构。

(2) 结构对称性：为了减小测力仪的向间干扰，除要求选用横向干扰小的测量晶组外，测力仪的变形构件结构相对于测量晶组的坐标轴必须严格对称。

(3) 结构工艺性：测力仪的结构设计必须便于加工，必须便于测量晶组的安装、定位、调整、维护和维修，特别是与晶片接触表面，一般都必须经过刮研与研磨，工艺性更要好，这样才能保证接触表面的质量要求。

(4) 结构稳定性：测力仪应该不因外界环境的干扰（如温度等）而使测力仪的预紧力

及晶组接触面的应力分布发生变化。首先测力仪的材料要稳定, 受热变形要小; 其次结构要合理。

对于三向压电钻削测力仪的壳体材料, 应选择具有较高强度、耐腐蚀性、弹性模量和较低温度系数的材料, 设计中多采用弹性性能好、滞后小的恒弹性合金来制造。该压电测力仪采用 1Cr18Ni9Ti, 该材料的屈服强度  $\sigma_{0.2}=206$  MPa, 抗拉强度  $\sigma_b=539$  MPa。测力仪壳体的设计应使横向干扰小, 线性度高。这就要求在同一承载面上, 结构设计必须使外环变形膜与内环变形膜具有相同的刚度; 要求每一个变形膜的宽度在其整个圆周上相等, 且厚度一致; 壳体的封口柱面与其上、下底面严格垂直, 上盖与底座的所有平面都应分别严格平行。此外, 壳体部分的密封应可靠, 结构要合理, 造型要美观大方, 如图 8-6 所示。

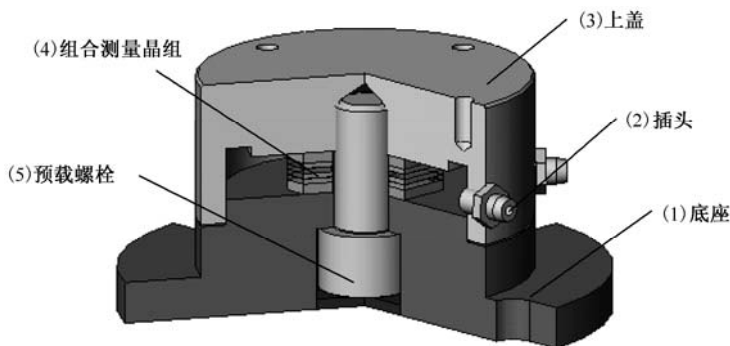


图 8-6 三向压电钻削测力仪的壳体结构

### 8.2.3 三向压电钻削测力仪的横向干扰

由于晶片切割时切角的定向误差, 晶轴方向判别和标记上的误差, 单元晶组与组合晶组构成时晶轴的相对误差, 组合晶组结构化可能带来的几何形状的误差, 测力仪结构设计及制造与装配工艺上的缺陷, 以及测力仪使用和测力仪设计上的不合理等原因, 都可能使测力仪产生横向效应, 或称为横向干扰。测力仪在力电转换过程中基于上述原因而在输出端反映出信号误差, 它必然对在理论上是正确的转换加以干扰, 势必造成测力仪或整个系统测试精度的下降。严格地说, 在整个量程范围内, 横向干扰是非线性的。

所谓向间横向干扰, 或称为向间干扰, 只存在于多向测力仪中, 一般说来, 若给其中一向加载, 其他各向输出应为 0。但由于上述原因, 在输出端仍有信号输出, 二者比值的百分数就是向间横向干扰。

对于三向压电钻削测力仪来说, 可能出现的向间干扰如下:  $M_t \rightarrow F_x$ , 表示扭矩对径向力的向间干扰, 以下类推:  $M_t \rightarrow F_z$ ;  $F_x \rightarrow M_t$ ;  $F_x \rightarrow F_z$ ;  $F_z \rightarrow M_t$ ;  $F_z \rightarrow F_x$ 。

产生上述干扰的主要原因如下：

为了使问题简化，便于逐步深入讨论，首先做两点假设：石英晶体切角精度完全符合设计要求；被测外力系  $Oxyz$  与测力仪给定的基准相符合。但由于测力仪壳体设计及制造上的不合理，晶组构成及组合晶组装架时的定向误差，测力仪壳体上盖压入时的工艺规程不当等，都可能引起组合晶组中各单元晶组互相不平行；组合晶组上、下底面不平行，组合晶组中单元晶组的最大灵敏度轴方向与测力仪壳体相应的基准不一致，弹性变形膜片的扭曲，装配后上、下承载面不平行等原因，都可能导致上面提到的测力仪向间横向干扰的出现，概括起来，主要表现如下：

(1) 当被测外力系的法向分力  $F_z$  与组合晶组中  $y0^\circ$  单元晶组的  $y(xz)$  面不垂直时，则必然产生作用在  $y$  面的切向分量  $\tau$ ，如图 8-7 所示，它的大小可用下式表示：

$$\tau = F_z \sin \alpha \quad (8.2.1)$$

式中， $\alpha$  是  $y0^\circ$  晶组的  $y$  轴与  $F_z$  作用线之间的夹角。

由此可见， $F_z$  增大或  $\alpha$  增大，都会使  $\tau$  增加。切向力  $\tau$  对于  $y0^\circ$  晶组来说是一个干扰分力，此时只要  $\tau$  的作用方向与  $y0^\circ$  晶组“0”灵敏度轴线不重合，则必然产生  $F_z \rightarrow F_x$  的向间横向干扰，当  $\tau$  的作用方向与  $y0^\circ$  晶组最大灵敏轴方向一致时，则此时横向干扰也最大。因测扭矩的晶组也是相同的晶组，若  $F_z$  作用点不为晶片的中心，产生的切向力  $\tau$  相对于中心点形成一个扭矩，则测扭矩的晶组必有电荷输出，必然导致横向干扰  $F_z \rightarrow M_1$ 。此外，因为  $y0^\circ$  晶组的  $x$  轴与  $F_z$  作用线不重合，必然会使其转换效率降低。

(2) 当被测切向力与组合晶组中  $x0^\circ$  单元晶组的  $x$  轴不垂直（或说被测切向力与  $x0^\circ$  晶组  $x$  面不平行）时，则必然产生与  $x0^\circ$  晶组  $x$  轴相平行的法向分力  $f_z$ ，如图 8-8 所示，它的大小可用下式表示：

$$f_z = F_x \sin \gamma \quad (8.2.2)$$

式中， $\gamma$  是切向力  $F_x$  与  $x0^\circ$  晶组  $x$  平面之间的夹角。

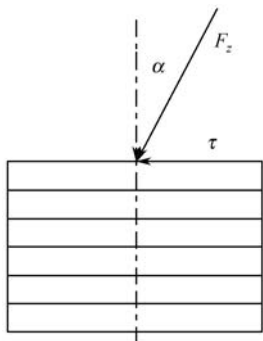


图 8-7  $y0^\circ$  晶组的切向载荷

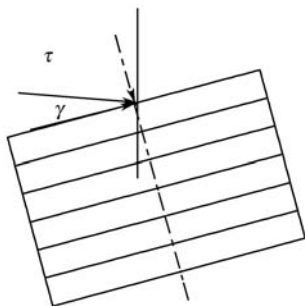


图 8-8  $x0^\circ$  晶组的法向干扰

若切向力一定,  $\gamma$  越大,  $f_z$  越大, 它是一个我们所不希望的法向干扰分力, 但它的  $F_x$  无论出现在什么条件下, 都将导致  $F_x \rightarrow F_z$  的向间横向干扰的产生。同理, 若  $F_x$  作用点不为晶片的中心, 相对于中心点形成一个扭矩, 则测扭矩的晶组必有电荷输出, 将引起  $F_x \rightarrow M_t$ 。

(3) 扭矩  $M_t$  作用在晶片上时, 可以看做  $M_t = F_l D$ ,  $F_1$ 、 $F_2$  大小相等, 方向相反。当扭矩  $M_t$  加载平面与组合晶组中  $x0^\circ$  单元晶组的  $x$  轴不垂直时, 则必然产生与  $x0^\circ$  晶组  $x$  轴平行的法向分力  $f_{z1}$ 、 $f_{z2}$ , 它们大小相等, 方向相反。如图 8-9 所示, 它的大小可用下式表示:

$$f_{z1} = f_{z2} = F_l \sin \beta_i \quad (8.2.3)$$

式中,  $\beta_i$  是  $F_i$  所在平面与  $x0^\circ$  晶组  $x$  平面之间的夹角。如图 8-9 所示,  $f_{z1}$ 、 $f_{z2}$  将在  $yz$  面内产生一个扭矩, 则必然引起  $M_t \rightarrow F_z$  和  $M_t \rightarrow F_x$ 。

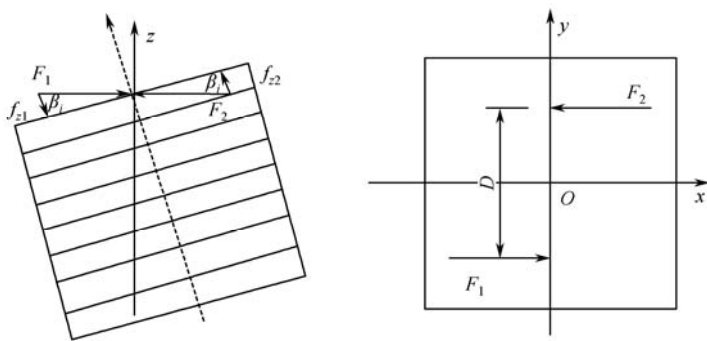


图 8-9  $M_t$  晶组的干扰

上述所有讨论, 都以被测外力系与测力仪设计或安装的基准参考系一致为前提, 若两者之间有误差, 同样会产生上述干扰; 若两种情况共同存在, 那么这种向间横向干扰有时(两者作用方向一致时)还可能会更大些, 并会使相应的转换效率更低些。

还有一点应充分强调, 尽管上述讨论是以没有切角误差为前提的, 但对于多向测力仪来说, 晶体的切角不准往往是造成向间横向干扰的主要原因。无论对于单向还是多向测力仪, 切角误差都会使转换效率降低。更应引起注意的是, 具有切角误差的晶片通常是不可补正的, 这往往会造成大批晶片白白浪费。

## 8.2.4 三向压电钻削测力仪的预紧力与量程计算

为了消除测力仪内外接触表面的间隙, 提高测力仪弹性系统的刚度, 以使其获得良好的静、动态特性, 就不可能不涉及预紧力。另外, 通过调整预紧力的大小, 可以调整测力仪的线性和灵敏度。最重要的是, 对于测量扭矩的测力仪, 要利用石英晶片的扭转

效应,利用晶片与壳体之间的摩擦力,预紧能使其获得足够的正压力,以产生足够的摩擦力来传递扭矩。

### 1. 预紧力

预紧方式可以分重力预紧和弹性力预紧两种。重力预紧就是将重物直接放在测力仪上方或悬挂在其下方。它的特点是预紧力恒定,不随被预紧件(测力仪)的变形而变化。这是优点也是缺点,该特点使得它没有分载作用,外加静载将毫无损失地加到测力仪上,其灵敏度不因预紧而影响。但重力预紧的缺点是当预紧力较大时,所加重物亦较大,预紧力有时不稳定,而且这种预紧方式导致测力仪的结构不紧凑。对于我们要制造的三向压电钻削测力仪来说,重力预紧所提供的预紧力是明显不够的,所以我们采用弹性力预紧。弹性力预紧就是靠预紧构件的弹性变形力使测力仪得到预紧,其特点是预紧力随着被预紧的测力仪变形而变化。由于预紧件总是具有一定刚度的弹性体,且与测力仪刚性并联,所以必然产生分载作用,即被测外力不能百分之百地传到测力仪上,有一部分消耗在预紧件的弹性变形上。弹性力预紧的结构紧凑,预紧件质量效果影响小,所以这种预紧方法不仅适用于测静态力,而且也适用于测动态力。预紧力调整方便,多数可通过螺纹进行调整。

弹性力预紧也有很多种形式,主要有:

(1) 用构件的弹性变形预紧。它利用弹性环的过盈产生的变形力将放在其中的晶组夹紧。这种方法稳定可靠,不会产生松动,但是它的缺点是预紧力不能微调。为了弥补这个不足,再附设一中心螺钉作为辅助预紧,能将预紧力调到所需值。

构件弹性变形的过盈量是根据下式计算的:

$$\Delta = \frac{K_p + K_T}{K_p \cdot K_T} F_p \quad (8.2.4)$$

式中,  $\Delta$  是弹性构件相对于晶组厚度方向上的过盈量;  $K_p$  是弹性构件的刚度;  $K_T$  是晶组的刚度;  $F_p$  是要求施加的预紧力。

(2) 电子束封焊预紧。将石英晶片直接放入壳体中,靠上盖的弹性预变形提供预紧压力,然后用电子束封焊夹紧。这种方法稳定可靠,密封性好,封焊后测力仪的性能和抗环境干扰能力强。但电子束封焊成本高,它要求有专用的电子束焊胎等工具,所以这种预紧方式适用于大批量生产。

(3) 圆周螺钉预紧。这种预紧方式多用于圆饼形测力仪或虽然带孔但结构上不允许的情况。如测力仪中的晶组中间无孔就采用这种预紧方式,或某些钻削测力仪虽中间有孔但要留给钻头,也采用这种方式。

(4) 中间螺钉预紧。这是最常用的一种预紧方法,其优点是结构比较简单,预紧力施加与调节比较方便,拆装维修也比较容易,同时还能起到构件的连接与分载作用。凡采用

孔型晶组的测力仪，几乎都是螺钉预紧。

为了尽可能提高三向压电钻削测力仪的动态性能和测试精度，同时主要考虑零件加工方便和装配调整预紧力方便，该三向压电钻削测力仪采用中间螺钉预紧方式，施加预紧力 10 000N。

## 2. 扭矩量程计算

测力量程是测力仪使用的重要参数，也是设计的依据。量程的设计与预紧力大小息息相关，两者要同时考虑。若沿测力仪轴向施加一定的预紧力  $N$ ，则在扭矩测量晶组的结合端面上便产生了一定的摩擦力，可求得摩擦力大小为

$$F_f = f \cdot N \quad (8.2.5)$$

式中， $f$  是石英与金属的摩擦系数（ $f = 0.1$ ）。

摩擦力  $F_f$  乘以摩擦力半径便得到摩擦力矩  $M_f$ 。如果忽略壳体弹性变形的话，所得到的摩擦力矩  $M_f$  即为所要求检测的外力矩  $M_t$ ，二者总是相等的，即  $M_f = M_t$ 。当正压力  $N=10\ 000\text{N}$  时，晶片表面的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (8.2.6)$$

如图 8-10 所示，微元积分面元的正压力为

$$dN = \sigma \cdot da = \frac{N}{A} dx dy \quad (8.2.7)$$

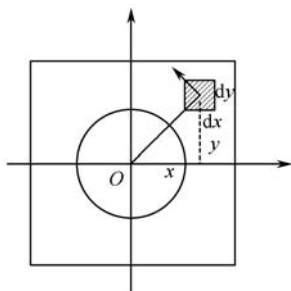


图 8-10 扭矩量程的积分确定法

则在此微元积分面上的扭矩为

$$dM_t = f \cdot dN \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = f \cdot \frac{N}{A} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad (8.2.8)$$

最后得到总的摩擦扭矩为

$$\begin{aligned}
M_t &= \iint_A f \cdot \frac{N}{A} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\
&= 4f \frac{N}{A} \left( \int_0^{0.0105} \int_0^{0.0105} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy - \int_0^{0.0065} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 dr d\theta \right) \\
&= 9.63 \text{ N} \cdot \text{m}
\end{aligned} \tag{8.2.9}$$

这里取值  $9 \text{ N} \cdot \text{m}$  作为该三向压电钻削测力仪扭矩的最大量程。

根据钻削过程中轴向力和径向力的测量范围, 保证测力仪不在过载能力量程段内工作, 有一定的量程储备, 轴向力  $F_z$  的量程取为  $0 \sim 1500 \text{ N}$ , 径向力  $F_x$  的量程取为  $0 \sim 1000 \text{ N}$ 。

### 8.2.5 三向压电钻削测力仪灵敏度的计算

三向压电钻削测力仪的灵敏度是指输入信号(力或扭矩的大小)和输出信号(电荷量)的比值, 它是反映测力仪灵敏程度的一个指标。

#### 1. 扭转灵敏度的计算

检测电极上靠近压电晶体一侧由扭转效应感生的自由电荷的面密度与压电体表面的极化电荷面密度大小相等, 符号相反, 而通过屏蔽线移动到同电极相连的高灵敏度电荷放大器的电荷放大级前端的总电量与检测电极覆盖区域的压电晶体表面极化电荷的总量相等, 且符号相同。单个电极所检测到的电量理论值可通过式(8.1.34)积分计算得到。

$$\begin{aligned}
Q &= 2 \int \eta_{bz+} da_{\text{电极1}} \\
&= 2 \left( \int_{-0.0105}^{0.0105} dx \int_0^{0.0105} \eta_{bz+} dy - \int_{-0.0065}^{0.0065} dx \int_0^{\sqrt{0.0065^2 - x^2}} \eta_{bz+} dy \right) \\
&= 159.058 M_t (\text{pC})
\end{aligned} \tag{8.2.10}$$

式中, 扭矩  $M_t$  单位为  $\text{N} \cdot \text{m}$ , 而通过各个检测电极所检测到的电量的单位则采用  $\text{pC}$  ( $10^{-12} \text{ C}$ )。从中可以发现, 理论计算表明每片电极所测量的电荷量与扭矩成线性关系, 随着扭矩增加, 电荷量也不断增大, 而且两电极所检测的电荷极性确实相反。

根据晶组灵敏度的定义, 可得到扭转灵敏度为

$$S_{\text{QF}} = \frac{Q}{M_t} = 159.058 (\text{pC} / \text{N} \cdot \text{mm}) \tag{8.2.11}$$

#### 2. 轴向力、径向力灵敏度的计算

对于轴向力、径向力的电荷灵敏度的计算, 可以根据所采用晶组的切型得到。

$$S_{\text{QF}} = \frac{Q}{F} = nd_{mj} (\text{pC/N}) \quad (8.2.12)$$

式中,  $d_{mj} (\text{pC/N})$  表示采用测量晶组的压电常数;  $n$  是晶组的晶片数, 对于测轴向力和径向力的单元晶组来说,  $n=2$ 。因此, 对于轴向力的灵敏度为

$$S_{\text{QZ}} = 2 \times d_{11} = 4.62 \times 10^{-12} \text{C/N} = 4.62 \text{pC/N} \quad (8.2.13)$$

径向力的灵敏度为

$$S_{\text{QX}} = 2 \times d_{26} = 9.24 \times 10^{-12} \text{C/N} = 9.24 \text{pC/N} \quad (8.2.14)$$

由此可以看出所研制的三向压电钻削测力仪具有很高的扭矩灵敏度。

## 8.3 三向压电钻削测力仪的动态特性分析

在通常的测量精度条件下, 测力系统的传递特性可看成二阶线性时不变系统。当外力变动频率低于测力仪的固有频率时, 测力仪测量才能准确, 否则要进行精度补偿。这就要求在进行测力仪的设计时, 不但要进行结构静态设计, 同时还要进行动态特性分析, 主要包括幅值误差设计和相频误差设计, 这里动态设计参数主要是测力仪的固有频率  $\omega_n$  和阻尼比  $\varepsilon$ 。

从提高测力仪动态性能来看, 固有频率  $\omega_n$  当然越高越好, 但是  $\omega_n$  的提高也受到测力仪的结构和灵敏度等的限制。所以,  $\omega_n$  的设计原则是从最低的要求开始, 向尽量高的方向努力。

### 8.3.1 幅值误差与带宽

作为一个理想的测力仪, 希望输出与输入在任何情况下都能保持固定不变的关系, 可实际上标志着测量精度的幅值比与相角差都是频率  $\omega$  的函数, 当  $\omega$  增大时, 其测量误差也必然增大。幅值相对误差  $\varepsilon_p$  是  $\omega_n$  和  $\xi$  的函数, 增大  $\omega_n$  或增大  $\xi$  都能使其减小。对于压电石英测力仪来说, 它的阻尼比都很小, 因而不容易加阻尼器, 所以“最佳阻尼”对石英是不现实的。因而对压电测力仪的幅值相对误差比其他“变位型”测力仪要求得小一些, 或者说, 在幅值相对误差相同的情况下, 压电测力仪的工作频带要比其他类型测力仪的宽一些。

一般压电测力仪固有频率的设计公式为



$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_p - \varphi}{\varepsilon_p}} \quad (8.3.1)$$

当  $\omega_n$  为已知时, 频率测量范围为

$$0 \leq \omega \leq \omega_n \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{1 + \varepsilon_p - \varphi}} \quad (8.3.2)$$

对于该三向压电钻削测力仪, 要求其频率范围为  $0 \sim 2$  kHz, 允许的最大幅值误差  $\varepsilon = 10\%$ 。  $0 < \psi < 1$ ,  $\psi$  取决于测力仪对惯性力感知的灵敏度, 灵敏度高取较大值, 反之则取较小值, 这里取  $\psi = 0.8$ 。将上述所需参数代入式 (8.3.1), 从幅值误差的角度可求得该测力仪所要达到的理论固有频率为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_p - \varphi}{\varepsilon_p}} = 2 \times \sqrt{\frac{1 + 0.1 - 0.8}{0.1}} = 3.46 \text{ kHz} \quad (8.3.3)$$

### 8.3.2 相位误差与带宽

相位误差即输入与输出的相角差, 相位误差随着  $\omega$  的增大而增大, 随着  $\xi$  的减小而减小。对压电测力仪来说,  $\xi$  都非常小, 所以相位误差均比较小, 一般不作特殊要求。

一般情况下, 从限制相位误差  $\varphi$  的角度来看, 设计测力仪的固有频率为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{\xi^2 + \tan^2 \varphi - \xi}} \quad (8.3.4)$$

要求该三向压电钻削测力仪的最高相位滞后  $\varphi = 5^\circ$ , 将上述相关参数代入式 (8.3.4) 中, 可求得

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \frac{\tan \varphi}{\sqrt{\xi^2 + \tan^2 \varphi - \xi}} = 3.45 \text{ kHz} \quad (8.3.5)$$

因此, 在同时考虑幅值误差和相位误差要求的情况下, 即式 (8.3.3) 和式 (8.3.5), 特取  $\omega_n = 3.46$  kHz 为基于三向压电钻削测力仪的设计依据。

对于压电测力仪的  $\xi$ , 因压电测力仪刚度高、固有频率高、阻尼小, 而设置专门阻尼器又很困难, 根据式

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} \quad (8.3.6)$$

可知  $\xi$  必然很小, 所以对压电测力仪  $\xi$  的设计没有具体要求。为了弥补由于  $\xi$  过小造成的测量精度和工作频带的损失, 通常用进一步提高  $\omega_n$  的办法来实现。

## 8.4 三向压电钻削测力仪的标定

测力仪在封合装配后使用之前，必须在技术和性能上进行一次全面的检定。标定的目的是检查测力仪是否达到所要求的技术性能指标，评定测力仪性能的优劣。

### 8.4.1 三向压电钻削测力仪的静态标定

该新型三向压电钻削测力仪采用自行设计的标定台进行静态标定。对于扭矩的标定加载,可采用在两个等距离的力臂上加载相同的力产生扭矩的方法进行标定,如图 8-11 所示。

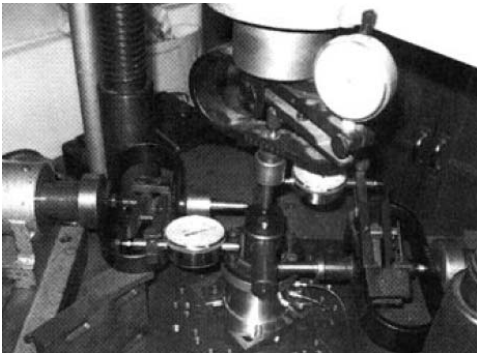


图 8-11 扭矩标定方法

#### 1. 轴向力的标定

轴向力标定结果如表 8-1 所示，其轴向力的归一化灵敏度  $S_{F_z} = 3.92$ 。

表 8-1 轴向力标定数据表

轴向力 $F_z$ (N)	输出电压 (mV)				非线性	重复性
	第一组	第二组	第三组	平均值	(%) FS	(%) FS
0	0	0	0	0	0.31	0.20
300	-302	-301	-300	-301.0		
600	-602	-601	-600	-601.0		
900	-896	-895	-895	-895.3		
1 200	-1 198	-1 201	-1 197	-1 198.7		
1 500	-1 501	-1 498	-1 498	-1 499.0		

2. 径向力的标定

径向力标定如表 8-2 所示，根据前面的分析可知，当径向力作用到测力仪上时，由于采用分割电极法提取电荷，所以需要将两个半电极的电量输出相加，来得到径向力产生的电荷量，即

$$V_{F_x}=V_{左}+V_{右}$$

(8.4.1)

径向力标定结果如表 8-3 所示。其中径向力的归一化灵敏度  $S_{F_x}$ =8.60。

表 8-2 径向力作用下两个半电极片的输出数据表

径向力 $F_x$ (N)	左半电极片输出电压 (mV)			右半电极片输出电压 (mV)		
	第一组	第二组	第三组	第一组	第二组	第三组
0	0	0	0	0	0	0
100	-48	-49	-49	-51	-52	-51
200	-98	-99	-97	-103	-103	-101
400	-198	-201	-197	-207	-206	-206
600	-293	-296	-292	-310	-308	-309
800	-390	-393	-389	-411	-408	-409
1000	-487	-490	-487	-513	-510	-510

表 8-3 径向力标定数据表

径向力 $F_x$ (N)	输出电压 (mV)				非线性	重复性
	第一组	第二组	第三组	平均值	(%) FS	(%) FS
0	0	0	0	0	0.57	0.40
100	-99	-101	-100	-100.0		
200	-201	-202	-200	-201.0		
400	-405	-407	-403	-405.0		
600	-603	-604	-601	-602.7		
800	-801	-801	-798	-800.0		
1000	-1000	-1000	-997	-999.0		

3. 扭矩的标定

利用如图 8-11 所示的专用标定装置，根据“力×力臂”的原理，设置两加载力之间的距离为 0.09m，因此，当两力同时加载到 20 N、40 N、60 N、80 N、100 N 时，将产生 1.8 N·m、3.6 N·m、5.4 N·m、7.2 N·m、9.0 N·m 的扭矩，作用到测力仪上去。测力

仪在扭矩单独作用下两个半电极的输出如表 8-4 所示。

表 8-4 扭矩作用时两个半电极片的输出数据表

扭矩 $M$ (N·m)	左半电极片输出电压 (mV)			右半电极片输出电压 (mV)		
	第一组	第二组	第三组	第一组	第二组	第三组
0	0	0	0	0	0	0
1.8	91	92	92	-89	-92	-91
3.6	180	181	181	-177	-181	-180
5.4	272	269	268	-271	-269	-268
7.2	363	359	359	-359	-356	-355
9.0	448	444	443	-446	-443	-442

由于采用分割电极法提取电荷，所以需要将两个半电极电荷的输出电荷数值相减，来得到扭矩产生的电荷量，即

$$V_M = V_{\text{左}} - V_{\text{右}}$$

(8.4.2)

扭矩标定结果如表 8-5 所示，其中扭矩的归一化灵敏度  $S_M=60.4$ 。

表 8-5 扭矩标定数据表

扭矩 $M$ (N·m)	输出电压 (mV)				非线性	重复性
	第一组	第二组	第三组	平均值	(%) FS	(%) FS
0	0	0	0	0	1.45	1.00
1.8	180	184	183	182.3		
3.6	357	362	361	360.0		
5.4	543	538	536	539.0		
7.2	722	715	714	717.0		
9.0	894	887	885	888.0		

8.4.2 三向压电钻削测力仪的向间干扰

尽管在测力仪设计、制造和使用中进行过许多周密的考虑，但是，横向干扰多多少少总是存在的。为了使测力仪所测得的实测值（示值）与切削力的实际值（真值）相一致，除了要求测力原理正确，测试系统具有良好性能外，还要消除扭矩、轴向力和径向力之间

的相互横向干扰。消除办法多采用精度补偿法，即通过计算进行事后的补偿和通过补偿器进行及时补偿。

由于在径向力和扭矩的作用下的电荷输出是通过测量电荷后，经过电荷分离得到的，所以轴向力对径向力和扭矩的横向干扰也需要通过电荷分离得到。首先，需要把分割电极的两个半电极输出的灵敏度调成一个统一值，如  $S_{左}=S_{右}=S_{电极}=2.00$ ，分别得到轴向力对两电极片输出的干扰，然后根据径向力和扭矩不同的归一化灵敏度，分别计算得到其干扰电荷输出。轴向力作用下两半电极片的输出数据如表 8-6 所示，轴向力对径向力的横向干扰输出可以根据式（8.4.3）计算得到，轴向力对扭矩的横向干扰输出可以根据式（8.4.4）得到。整理得到轴向力对径向力的干扰如表 8-7 所示，对扭矩的输出干扰如表 8-8 所示。径向力和扭矩对轴向力的横向干扰可以通过直接读数得到，如表 8-9 和表 8-10 所示。

$$V_{F_z \rightarrow F_x} = (V_{左} + V_{右}) \times \frac{S_{电极}}{S_{F_x}}$$

(8.4.3)

$$V_{F_z \rightarrow M} = (V_{左} - V_{右}) \times \frac{S_{电极}}{S_M}$$

(8.4.4)

表 8-6 轴向力作用下两个半电极片的输出数据表

横向干扰 $F_z$ (N)	左半电极片输出电压 (mV)			右半电极片输出电压 (mV)		
	第一组	第二组	第三组	第一组	第二组	第三组
0	0	0	0	0	0	0
300	-3	-2	-3	23	24	21
600	-7	-7	-8	49	46	45
900	-11	-11	-14	58	57	56
1 200	-13	-14	-16	62	65	62
1 500	-19	-21	-16	68	72	68

表 8-7  $F_z \rightarrow F_x$  横向干扰数据表

横向干扰 $F_z \rightarrow F_x$ (N)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
300	4.7	5.1	4.2	4.7
600	9.8	9.1	8.6	9.2
900	10.9	10.7	9.8	10.5
1 200	11.4	11.9	10.7	11.3
1 500	11.4	11.9	12.1	11.8

表 8-8  $F_z \rightarrow M$  横向干扰数据表

横向干扰 $F_z \rightarrow M$ (N)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
300	-8.6	-8.6	-7.9	-8.4
600	-18.5	-17.5	-17.5	-17.8
900	-22.8	-22.5	-23.2	-22.8
1200	-24.8	-26.2	-25.8	-25.6
1500	-28.8	-30.8	-27.8	-29.1

表 8-9  $F_x \rightarrow F_z$  横向干扰数据表

横向干扰 $F_x \rightarrow F_z$ (N)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
100	-5	-4	-4	-4.3
200	-11	-9	-8	-9.3
400	-23	-20	-17	-20.0
600	-32	-30	-25	-29.0
800	-34	-35	-29	-32.7
1000	-46	-47	-40	-44.3

表 8-10  $M \rightarrow F_z$  横向干扰数据表

横向干扰 $M \rightarrow F_z$ (N·m)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
1.8	4	4	4	4.0
3.6	10	10	10	10.0
5.4	16	16	15	15.7
7.2	21	22	21	21.3
9.0	29	29	29	29.0

径向力对扭矩的干扰可以根据表 8-2 得出，当只有径向力作用在测力仪上时，两分割电极的输出电量应完全相同，但事实上并不完全相同，两电极输出电荷之差便为径向力对扭矩的干扰，根据式（8.4.5）转换为扭矩归一化灵敏度下的电荷输出，数据结果如表 8-11 所示。

$$V_{F_x \rightarrow M} = (V_{\text{左}} - V_{\text{右}}) \times \frac{S_{\text{电极}}}{S_M}$$

(8.4.5)

表 8-11  $F_x \rightarrow M$  横向干扰数据表

横向干扰 $F_x \rightarrow M$ (N·m)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
100	4.3	4.3	2.8	3.8
200	7.1	5.7	5.7	6.2
400	12.8	7.1	12.8	10.9
600	24.2	17.1	24.2	21.8
800	29.9	21.4	28.5	26.6
1000	37	28.5	32.7	32.7

扭矩对径向力的干扰可以通过表 8-4 计算得出。当只有扭矩作用在测力仪上时，两电极片的输出电荷量应大小相等，正负相反，两电极的输出之和应为零。但事实上输出之和并不完全等于零，这就造成了对径向力的干扰。对表 8-4 中的两电极的输出求和，根据式 (8.4.6) 转换为径向力归一化灵敏度下的输出，如表 8-12 所示。

$$V_{M \rightarrow F_x} = (V_{\text{左}} + V_{\text{右}}) \times \frac{S_M}{S_{F_x}}$$

(8.4.6)

表 8-12  $M \rightarrow F_x$  横向干扰数据表

横向干扰 $M \rightarrow F_x$ (N·m)	输出电压 (mV)			
	第一组	第二组	第三组	平均值
0	0	0	0	0
1.8	1	0	1	0.7
3.6	2	0	1	1.0
5.4	1	0	0	0.3
7.2	3	2	3	2.7
9	1	1	1	1

根据以上静态标定分析，可以得到轴向力、径向力、扭矩的标定图如图 8-12~图 8-14 所示。

由标定数据和图可以看出, 轴向力的电荷灵敏度为  $3.92 \text{ pC/N}$ , 线性度为  $0.31\%$ , 重复性为  $0.20\%$ ; 径向力的电荷灵敏度为  $8.60 \text{ pC/N}$ , 线性度为  $0.57\%$ , 重复性为  $0.40\%$ ; 扭矩的电荷灵敏度为  $60.4 \text{ pC/N}$ , 线性度为  $1.45\%$ , 重复性为  $1.00\%$ , 其向间干扰较小。根据静态标定的结果, 每项指标即电荷灵敏度、非线性、重复性都达到了 CIRP-STCC (国际生产工程研究会-切削科学技术委员会) 规定的标准。

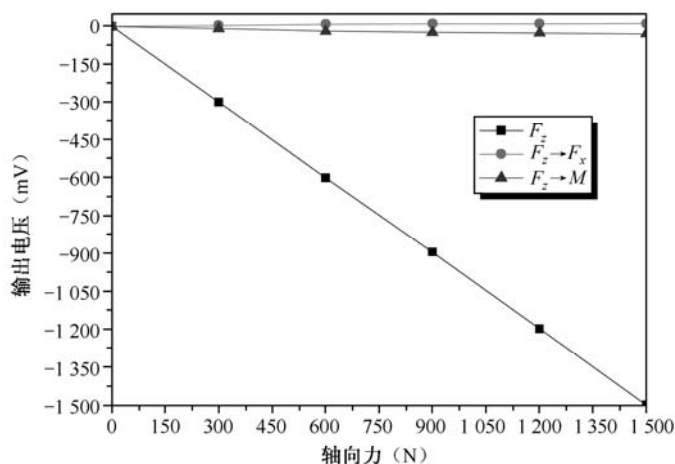


图 8-12 轴向力标定图

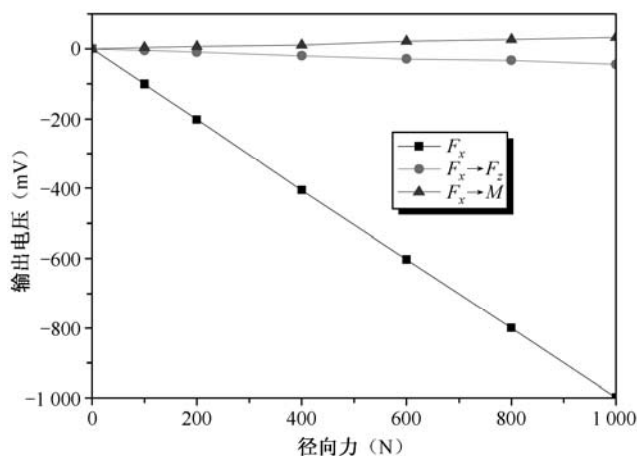


图 8-13 径向力标定图



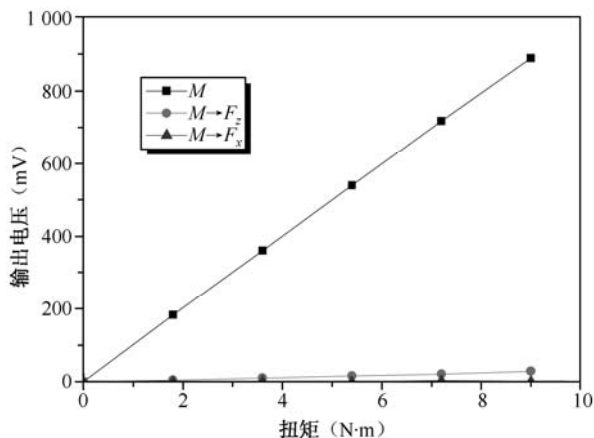


图 8-14 扭矩标定图

### 8.4.3 三向压电钻削测力仪的动态标定

动态测力仪经静态标定后，还必须进行动态标定，这是因为使用不同结构和类型的测力仪，即使在相同切削条件下测得的静态分量相同，切削力的动态分量也会产生很大的不同，这只能用测力仪具有不同的动态性能来解释。同时由于测力仪动态性能不同，反过来又将引起切削参数发生较大变化。由此可见，动态特性是动态测力仪的重要指标，所以须进行动态标定。此外，动态标定也是对测力仪进行性能对比、选择测力仪的重要手段。

三向压电钻削测力仪固有频率测试系统采用冲击响应法，测试结果如图 8-15～图 8-17 所示。

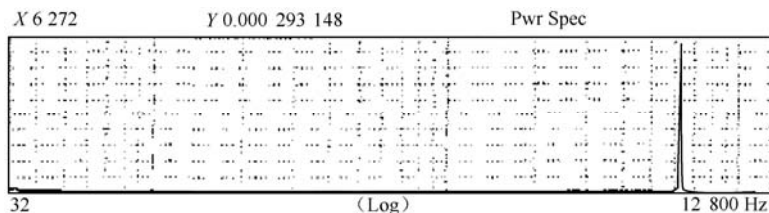


图 8-15 轴向频率响应特性曲线

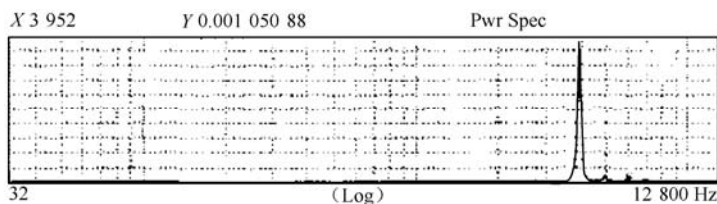


图 8-16 径向 1 频率响应特性曲线

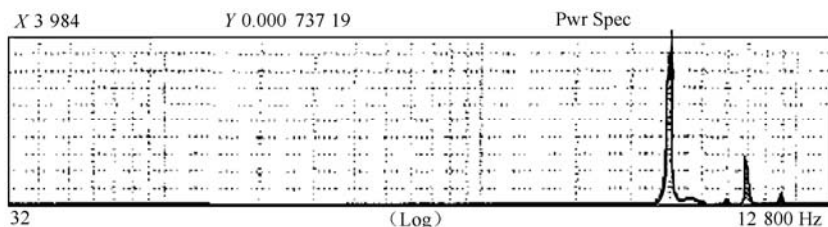


图 8-17 径向 2 频率响应特性曲线

从图中可以看出，该三向压电钻削测力仪的轴向第一阶固有频率  $\omega_a = 6.272 \text{ kHz}$ ，径向第一阶固有频率  $\omega_{r1} = 3.952 \text{ kHz}$ ，与该径向相垂直的另一径向第一阶固有频率  $\omega_{r2} = 3.984 \text{ kHz}$ ，固有频率达到理论计算所要求的  $3.46 \text{ kHz}$  以上，达到了 CIRP-STCC（国际生产工程研究会-切削科学技术委员会）规定的标准。一般压电式测力仪可以测量到测量系统的第一阶固有频率的一半左右。实际上，由于压电加速度传感器也具有一定的质量，将产生负载效应，所以三向压电钻削测力仪的实际固有频率要比上述测试结果略高。一般测力仪对线性和横向干扰不进行动态标定，只是静标动用。

## 第9章

# 压电传感器静态和动态标定

传感器封合、焊接之后，在使用之前必须进行一次全面的技术上和性能上的检定。检定的目的是检查传感器是否达到所要求的技术性能指标，评定传感器性能的优劣，及时掌握与正确分析传感器本身在科学研究、生产和使用中出现问题，以便在之后传感器设计和制造时提高其质量保证。作为正式产品出厂时，制造部门必须将技术检定合格证书及产品性能明细表一起交给用户，以备使用者能全面了解传感器的性能和特点，并能够作为传感器使用、安装和调整时的参考。

### 9.1 压电传感器静态标定

传感器的标定是通过实测的方法来建立输入量和输出量之间的关系及规律。压电传感器与电荷放大器、记录显示仪表共同组成标定（或测试）系统，所以严格地说，标定也是对上述整个系统的标定。通过静态标定可以得到静态灵敏度、线性、滞后、重复性、稳定性、静态刚度及横向干扰等各项精度指标。

传感器的静态标定相对于动态标定而言，是指输入与输出信号不随时间变化（或变化十分微小）的一种标定方法。

### 9.1.1 静态误差的定义方法

静态误差主要指传感器特性曲线的非线性误差、重复性误差、滞后（进回程差）及横向干扰（主要指多向传感器的向间干扰）的定义和表示方法。

石英晶体力传感器在对外力进行测量时的误差（系统误差和随机误差）主要由下述 4 个指标来体现。

#### 1. 非线性误差

在规定的条件（温度与湿度）下，传感器的实际标定特性曲线与理论直线的不一致性如图 9-1 所示。

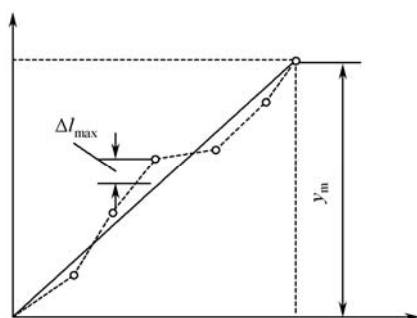


图 9-1 非线性误差示意图

非线性误差在数值上用标定曲线与理论直线间的最大偏差与满量程（F.S.O）输出之比的百分数来表示。

$$L_N = \frac{\Delta I_{\max}}{y_m} \times 100\% \quad (9.1.1)$$

式中， $\Delta I_{\max}$  是在全量程范围内实际特性曲线与理论直线间的最大偏差； $y_m$  是满量程输出。

#### 2. 重复性误差

在与上述相同的环境与工作条件下，当输入在同一方向连续加载多次（一般为 3 次）时特性曲线的不一致性如图 9-2 所示。

重复性误差在数值上用特性曲线最大重复性差值对满量程输出的百分比来表示。

$$L_N = \frac{\Delta R_{\max}}{y_m} \times 100\% \quad (9.1.2)$$

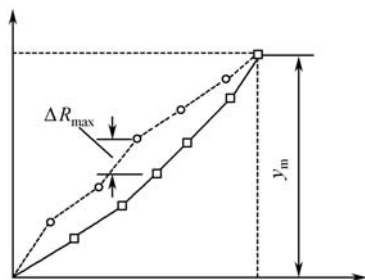


图 9-2 重复性误差示意图

式中,  $\Delta R_{\max}$  是在全量程中各特性曲线最大重复性差值;  $y_m$  是满量程输出。

### 3. 滞后误差

滞后误差对应于相同输入时, 正、反行程 (加、卸载) 中两个输出量 (一般取 3 次平均值) 之差, 如图 9-3 所示。

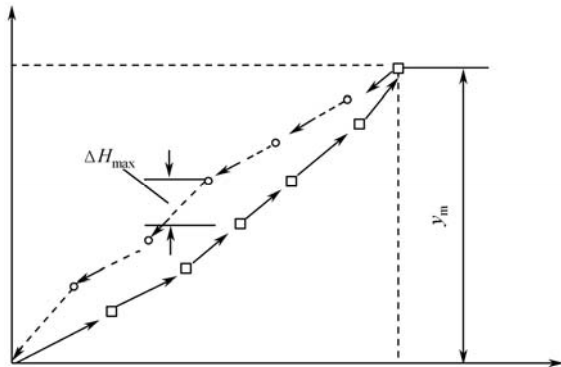


图 9-3 滞后误差示意图

滞后误差通常用全量程中最大滞后差值与满量程输出的百分比来表示。

$$H_v = \frac{\Delta H_{\max}}{y_m} \times 100\% \quad (9.1.3)$$

或

$$H_v = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta H_{\max}}{y_m} \times 100\% \quad (9.1.4)$$

上述 3 项指标的误差均为满量程相对误差。

#### 4. 向间横向干扰

在传感器某一特征方向上输入时,在其他方向(所谓横向)产生的输出。向间横向干扰在数值上以横向输出与相应的特征方向输出之比的百分数来表示。

### 9.1.2 采用“逐级加、卸载法”进行静态标定的方法与步骤

标定最常用的方法是“逐级加、卸载法”(或称为阶梯加载法)。此方法是将被标传感器的满量程分成等间隔的数个标定点(不应该低于 6 点),一般以满量程的 10%(或 15%)作为第一标定点的加载力值,然后逐级加、卸载,将输出记录下来,按前面介绍的各个精度项目的定义方法和给出的公式加以计算整理。其主要步骤如下:

(1) 将整个测试系统——电荷放大器和数字电压表(或紫外线记录仪),按传感器标定要求进行调节,使其处于待工作状态。

(2) 根据传感器的类型,按其具体要求,将传感器置于标定位置上,严格校准力轴的方向和位置。

(3) 将连接电缆的一端先与传感器相连,然后将传感器短接,最后将连接电缆的另一端与电荷放大器的输入端相接。

(4) 在正式标定之前,沿传感器 Z 轴方向预压 4 次。

第一次加载至传感器满量程的 50%~70%,然后卸载;

第二次、第三次、第四次每次都加载至超过满量程的 5%~10%,每次加载后稍停片刻(约 10 s 左右),再卸载。

(5) 施加预载,电荷放大器处于工作状态。

对于每一个传感器,最后实际确定的预载的大小,应以该传感器所能得到的最佳线性预载为准。预载加上以后,应将电荷放大器清零(工作按钮复位)。

(6) 测试线路的归一化调节(亦称为“适调”)。调节结果应使系统输出电压数值与作用在传感器上的机械量数值的有效数字完全一致。此时所求得的归一化灵敏度,暂作为被标传感器的归一化电荷灵敏度。

(7) 加载标定。从满量程的 10%(或 15%)开始逐级加至满量程,然后逐级卸载,反复 3 次,并记录。

(8) 数据处理。数据处理以线性标定为例说明,具体步骤如下:

- 按3次加载的实测值计算出其各相应点的平均值,若考虑到“原点”(为0或不为0)再相应求出各点实际值的大小。
- 以满量程的实际输出与满量程输入之比  $S_{Q_{理}}$  作为理论直线的斜率,求得理论直线;或以实际平均零点(原点)和平均满量程输出点连成一条线,作为理论直线。这种求理论直线的方法称为端点(或端基)法,求得的线性度(非线性误差)常称为端点线性度。
- 用得到的  $S_{Q_{理}}$  求出各相应点的理论值。
- 求出实际输出值与理论值之间的最大差值。
- 求出非线性误差。

还有一种用得比较多的求传感器线性的方法是把3次输出的平均值与相应输入力值之比作为该力值下的静态灵敏度,然后求出其平均灵敏度,再以平均灵敏度为斜率作理论直线,那么,每一力值下的输出值与理论值之间的最大偏差与满量程输入之比,即为传感器的非线性误差。

此外,还可以通过“平均选点法”或“最小二乘法”求出拟合直线(回归直线),以得到传感器的线性,这种方法精确度比上述方法更高些,但计算量较大,而前述方法精确度相对偏低些,但比较可靠,数据处理也都很容易求得。

有一点要特别注意,若非线性超差大于 $\pm 1\%$ ,而传感器本身、传感器的安装及整个测试系统没有问题的话,则可通过改变预载,重复上述过程,直到合格为止。

### 9.1.3 石英晶体力传感器技术性能指标

标定通常建立石英传感器的输入和输出关系,以及上述4种静态误差,那么静态误差多大时就符合传感器的质量要求呢?下面分别给出石英晶体力传感器的主要技术性能指标。

- (1) 输入、输出信号间应有一定的函数关系,应该是单值线性。
- (2) 较高的灵敏度。
  - Z向电荷灵敏度:  $40 \text{ pC/kgf}$
  - X、Y向电荷灵敏度:  $80 \text{ pC/kgf}$
- (3) 特性曲线的非线性误差:  $\leq \pm 1\%$
- (4) 特性曲线的重复性误差:  $\leq \pm 1\%$
- (5) 特性曲线的滞后误差:  $\leq \pm 1\%$
- (6) 向间横向干扰:  $< 5\%$

(7) 较高的静刚度。

● Z 向刚度:  $\approx 100 \text{ kgf} / \mu\text{m}$

● X、Y 向刚度: 一般取 Z 向刚度的  $\frac{1}{3}$

(8) 高的固有频率:  $\geq 2 \text{ kHz}$

(9) 高的绝缘阻抗:  $10^{13} \Omega$

(10) 低的灵敏度温度系数:  $< -0.02\% / ^\circ\text{C}$

(11) 使用温度范围: 满足使用要求

(12) 测力范围: 按设计要求

## 9.2 多功能压电测力仪静态标定台

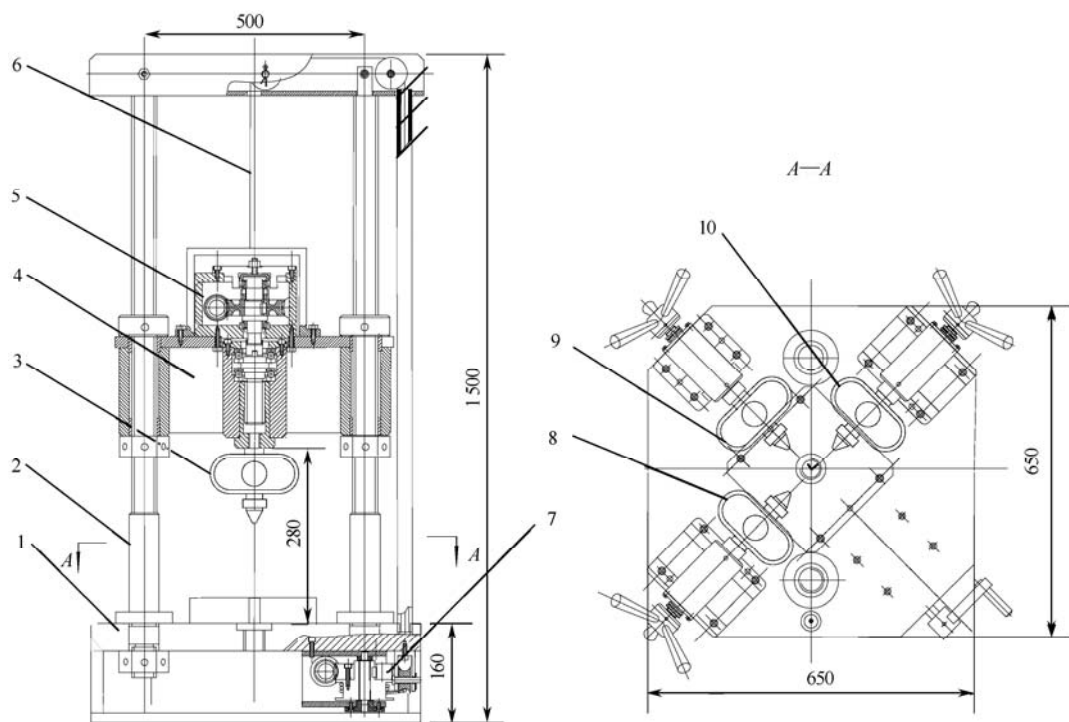
本节介绍一种自行研制的简易、高精度、高刚性压电石英晶体力传感器静态标定装置,如图 9-4 所示。这种标定装置也可以对单向、双向力传感器,三向(或单、双向)压电式测力仪及钻削扭矩等进行静态标定,并可完成几乎所有的静态标定项目(静态灵敏度、线性、重复性、滞后及静刚度和横向干扰)。

### 9.2.1 多功能压电测力仪静态标定台原理与结构

对空间任何方向的一个力的矢量求解(得到其大小和方向),工程上最常用的方法是将该矢量投影到选定的直角坐标系的 3 个坐标轴上,然后求出各分矢量的大小及其与合矢量的相位关系。三向压电式力传感器的特点在于它可以将作用于其承载面上的任一方向力的矢量  $\mathbf{F}_R$  (或若干个力的合矢量)分解到所选定的坐标系  $Oxyz$  三个坐标轴上输出,被测力各分矢量组成一个空间三维正交力系。传感器(或测力仪)的输出正是在选定的三维正交坐标系里各个分矢量的大小。因此,标定装置将传感器(或测力仪)加载的各力轴线组成一个三维正交坐标系,那么传感器(或测力仪)在这个选定的坐标系里就可以进行标定了。

多功能压电测力仪静态标定台的结构如图 9-4 和图 9-5 所示。该标定台主要由基座 1、支撑螺柱 2、铅垂力标准测力环 3、提升箱体 4、铅垂力加载机构 5、提升钢缆 6、提升机 7、水平力标准测力环 8、9、10 等组成。





1—基座；2—支撑螺柱；3—铅垂力标准测力环；4—提升箱体；5—铅垂力加载机构；  
6—提升钢缆；7—提升机；8、9、10—水平力标准测力环

图 9-4 压电石英晶体力传感器静态标定装置

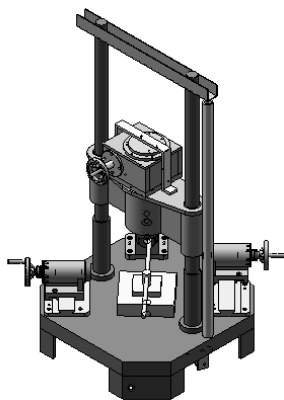


图 9-5 三向压电式力传感器标定装置

## 1. 基座

基座由不同厚度的钢板焊接而成,底座上面装有两个支撑螺柱,测力仪安装基座、两个可调水平加载机构和一个固定水平加载机构,其安装位置度误差均小于 0.2 mm,底座台面选 50 mm 厚的热轧钢板,这样在最大铅垂载荷(约 50 kN)作用下也能保证有足够的刚度和位置精度,上表面的平面度误差要小于 0.1 mm,以保证水平加载机构和测力仪安装于基座的位置精度,底座下部是用 15 mm 厚的钢板围焊成支脚结构,以便于加载器的放置和固定。下部还装有用来升降铅垂载荷加载机构的提升机构,以适应高度小于 600 mm 的不同加载对象的需要。

## 2. 支撑螺柱

两个支撑螺柱用 45 号结构钢经调质处理制成,上面梯形螺纹的尺寸为 Tr48X8-8e,可承受铅垂力加载机构的自重和施加的拉压载荷,有足够的刚度和稳定性。螺柱、支撑螺柱的下端通过过渡配合装在底座上,并保证其与底座上面应有的垂直度。它的上端固定在横梁上,中间段与铅垂力加载机构支架的导套配合,为保证螺柱与铅垂加载机构加载方向的偏角足够小,又要使该机构提升顺畅,配合间隙的选择要合适,导套与螺柱的配合跨度尽量大。当配合跨度为 200 mm,配合间隙为 0.1 mm 时,其偏角不大于  $0.058^\circ$ ,导套上下的螺母锁定铅垂载荷加载机构的高度。

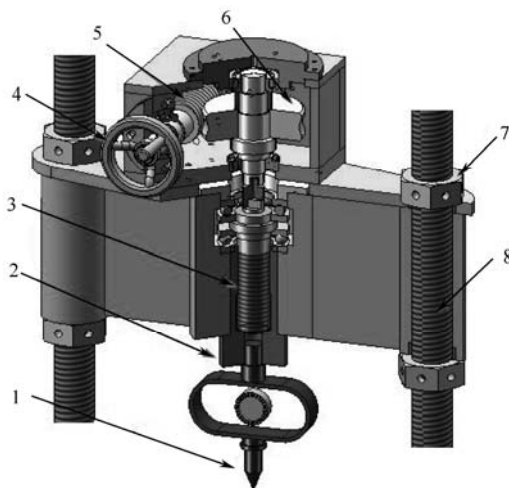
## 3. 铅垂力加载机构

图 9-6 所示的铅垂力加载机构由一个蜗轮蜗杆机构和一个滑动螺旋副组成,这样的机构可使成年操作者通过摇动手柄产生约 50 kN 的铅垂加载力,利用底座板中间的 M35 螺纹孔固定加载对象,可以形成很大的拉力,它可以用于测力仪预紧力较大部件的拆卸等。工作中 3 个水平力加载机构也是用滑动螺旋副产生推力,一个位置固定,两个位置可平移调整,其分布位置和方向便于形成正交水平推力,加上铅垂方向的力就形成 3 个交于一点的正交力组,可调水平力加载机构适当平移后可便于在水平面内加载和测量力矩,将 4 个加载机构配上适当的标准测力计组件后就可对固定在安装基座上的诸如车削、钻削等多种测力仪加载标定。

## 4. 水平力加载机构

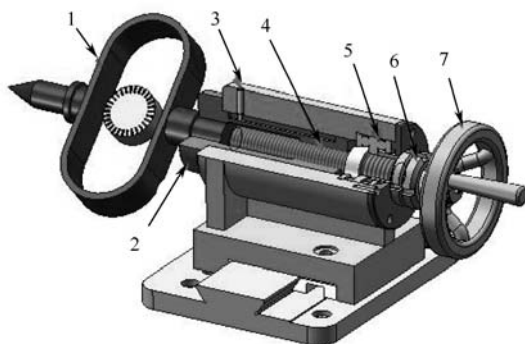
水平力加载机构通过摇动手轮带动螺杆转动,螺套因受防转销的限制,只能前后移动不能转动,从而将手轮的转动转变为螺套的直线移动,而且有可靠的自锁性,螺套的前端有测力计组件配合的标准螺纹,安装测力计组件后就可边加载边观察载荷大小,如图 9-7 所示。对于两个可调水平力加载机构,其下部有燕尾槽结构,通过旋动螺母可调整楔块的高低,从而锁紧或松开平移加载机构,平移的距离根据要加载的力矩和所选测力计而定,

当只加载力矩时, 铅垂载荷加载机构和固定水平力加载机构就不用了; 而只测三向力时, 应把其中一个可调水平力加载机构调整到对中的位置, 与固定水平力加载机构和铅垂力加载机构组成三向加载系统, 而另一个可调水平力加载机构就不用了。



1—标准测力环；2—螺套；3—螺杆；4—手轮；5—蜗杆；6—蜗轮；7—锁紧螺母；8—支撑螺柱

图 9-6 铅垂力加载机构



1—标准测力环；2—螺套；3—防转销；4—螺杆；5—轴承；6—螺母；7—手轮

图 9-7 可调水平加载机构

## 5. 提升机构

提升机构由一蜗轮蜗杆减速器、钢丝绳及滑轮等组成, 以便于铅垂力加载机构升降。使用时先松开铅垂力加载机构上面或下面的两个螺母, 再摇动摇把, 摇把连在蜗杆上, 蜗

轮轴卷绕钢丝绳，经横梁上的滑轮后实现铅垂力加载机构的升降，使用非常方便。

## 9.2.2 滑动螺旋传动设计计算

滑动螺旋在工作时，主要受到转矩和轴向力的作用，在螺杆和螺母螺纹间有较大的相对滑动，其失效形式主要是螺纹磨损。因此，滑动螺旋的基本尺寸（螺杆直径和螺母的高度）通常是根据耐磨条件确定的。对于长径比很大的螺杆，应校核其稳定性，防止螺杆受压后失稳。

下面是对 XY 加力螺杆的耐磨性计算和校核性计算。

### 1. 耐磨性计算

滑动螺旋的磨损与螺纹工作面上的压力、滑动速度、螺纹表面的粗糙度及润滑状态的因素有关。其中最主要的是螺纹工作面上的压力，压力越大螺旋副间就越容易形成过度磨损。因此，滑动螺旋的耐磨性主要是限制螺纹工作面上的压力  $p$ ，使其小于材料的许用压力  $[p]$ 。

已知螺杆的轴向力为 4 900 N（500 kgf），查《机械设计手册》得螺杆-螺母材料都为钢时， $[p]=8\text{ MPa}$ ， $\phi$  取值为 1.2~3.5，此处取  $\phi=2$ ，计算螺杆中径为

$$d_2 \geq 0.8 \sqrt{\frac{F}{\phi[p]}} = 0.8 \times \sqrt{\frac{4\,900}{2 \times 8}} = 14\text{ mm} \quad (9.2.1)$$

查《机械设计手册》，取  $d=20\text{ mm}$ ，螺距  $P=4\text{ mm}$ ，螺杆中径  $d_2=18\text{ mm}$ 。

因为螺距  $P=4\text{ mm}$ ， $d_2=18\text{ mm}$ ，则螺母的高度  $H=\phi d_2=2 \times 18=36\text{ mm}$ ，而螺纹的工作高度  $h=0.75P=3\text{ mm}$ ，取旋合圈数  $z=10$ 。

根据公式  $p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d_2 z h} \leq [p]$ ，则  $p = \frac{4\,900}{3.14 \times 18 \times 10 \times 3} = 2.89\text{ MPa} \leq 8\text{ MPa}$ ，满足条件。

### 2. 自锁性计算

螺纹升角  $\lambda = \arctan \frac{P}{\pi d_2} = \arctan \frac{4}{3.14 \times 18} = 4.05^\circ$ ，此值小于  $4.5^\circ$ ，满足要求。

当量摩擦角  $\rho_v = \arctan \frac{f}{\cos \frac{30^\circ}{2}} = 6.5^\circ$ 。

由于  $\lambda \leq \rho_v$ ，自锁性条件满足。

### 3. 螺杆的强度计算

受力较大的螺杆需要进行强度计算。螺杆工作时受到轴向压力  $F$  和扭矩  $T$  的作用。螺杆在危险截面上既有压缩（或拉伸）应力，又有切应力。因此校核螺杆强度时，应根据第四强度理论求出危险截面的计算应力  $\sigma$ ，其强度校核条件为

$$\sigma_{ca} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_t}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (9.2.2)$$

式中， $F$  是螺杆所受到的轴向压力，为 4 900 N； $A$  是螺杆螺纹段的危险截面面积，

$$A = \frac{\pi(d_1)^2}{4} = \frac{3.14 \times 15.5^2}{4} = 188.596 \text{ mm}^2; \quad W_t \text{ 是蜗杆螺纹段抗扭截面系数, } W_t = \frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$= \frac{3.14 \times 15.5^3}{16} = 730.81 \text{ mm}^3, \quad d_1 \text{ 是蜗杆螺纹小径, } d_1 = 15.5 \text{ mm}; \quad T \text{ 是蜗杆所受到的扭矩,}$$

$$T = F \tan(\lambda + \rho_v) \frac{d_2}{2} = 8070.42 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad [\sigma] \text{ 是许用应力, 查《机械设计手册》, 得到 } \sigma_s = 240 \text{ MPa,}$$

螺杆的许用应力  $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{3 \sim 5}$ ，取  $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{5} = 240/5 = 48 \text{ MPa}$ 。

把数值代入式 (9.2.2) 中，得到

$$\sigma_{ca} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4900}{188.596}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{8070.42}{730.81}\right)^2} = 28.2344 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$

### 4. 螺母螺牙的强度计算

螺纹牙多发生剪切和挤压破坏，一般螺母材料强度低于螺杆，故只需要校核螺母螺纹牙上的强度。

#### 1) 剪切强度

查《机械设计手册》，得螺纹牙底宽度  $b = 0.65P = 0.65 \times 4 = 2.6 \text{ mm}$ ，螺纹旋合圈

数  $z = \frac{h}{P} = \frac{36}{4} = 9$ ，螺纹牙材料的许用应力  $[\tau] = 0.65[\sigma] = 31.2 \text{ MPa}$ 。

螺纹牙危险截面的剪切强度条件为

$$\tau = \frac{F}{\pi dbz} = \frac{4900}{3.14 \times 20.5 \times 2.6 \times 9} = 3.25 \text{ MPa} \leq [\tau] \quad (9.2.3)$$

#### 2) 抗弯强度

查《机械设计手册》，得螺纹牙的工作高度  $h = 0.5P = 0.5 \times 4 = 2 \text{ mm}$ ，螺纹螺母材料的许用弯曲应力  $[\sigma_b] = 48 \text{ MPa}$ 。

螺纹牙危险截面的弯曲强度条件为

$$\sigma = \frac{6Fh}{\pi db^2z} = \frac{6 \times 4\,900 \times 2}{3.14 \times 20.5 \times 2.6^2 \times 9} = 15.02 \text{ MPa} \leq [\sigma_b]$$

(9.2.4)

5. 螺杆的稳定性校核

对于长径比大的受压螺杆，当轴向压力  $F$  大于某一临界值时，螺杆就会突然发生侧向弯曲而丧失其稳定性。

设两端固定，则  $\mu=0.5$ 。

长径比  $\lambda = \frac{4\mu l}{d_1} = \frac{4 \times 0.5 \times 105}{15.5} = 13.55 < 40$ ，无须进行稳定性计算。

9.2.3 精度与刚度

对标定装置最主要的要求是稳定性好，使用可靠，这样才能保证标定精度，以便对传感器和测力仪做出切合实际的评价。为达到这个目的就必须对标定装置本身的精度和刚度在进行正确分析的基础上提出一系列严格的要求。

1. 精度

在标定装置设计中，应根据压电石英三向力传感器及测力仪本身的技术性能特点，合理地制定指标，而且必须具有一定的精度储备。这些精度指标的内容以及它们的具体数值如表 9-1 所示。表中最后一列给出了该标定台相关精度指标的检测结果。

表 9-1 精度指标及其检定

序号	精度项目	设计要求	检定结果
1	Z 向力轴中心线对安装基准平面的垂直度误差	不得大于 3′	30″
2	X、Y 向力轴中心线对安装基准平面的平行度误差	在 150 mm 长度时不得大于 0.03 mm	在 150 mm 长度时为 0.01 mm
3	X、Z 向力轴中心线对安装基准平面的等高性误差	不得大于 0.04 mm	0.01 mm
4	X、Y、Z 三轴相互垂直度误差		
	X 与 Y 方向垂直度误差	不得大于 4′	−1′
	X 与 Z 方向垂直度误差	不得大于 4′	−10″
	Y 与 Z 方向垂直度误差	不得大于 4′	30″
5	X、Y、Z 三轴汇交		
	X 与 Y 轴中心线汇交误差	不得大于 0.05 mm	0.01 mm
	X 与 Z 轴中心线汇交误差	不得大于 0.05 mm	0.017 mm
	Y 与 Z 轴中心线汇交误差	不得大于 0.05 mm	0.02 mm

由表 9-1 可知，标定装置的精度指标（制造后的精度比设计要求还高些）一般比压电石英力传感器的使用精度的当量值要高得多（约 5~10 倍），即标定装置对被测元件有足够的精度储备，因此，标定精度可以得到充分保证。

2. 刚度

刚度就是指标定装置的各个加载机构在承受最大载荷时，影响被测元件标定精度的主要构件的变形程度。结构的设计与计算必须满足整个装置的高刚度要求，这是保证整个装置持久稳定性的主要措施。

对完成的标定台进行专门的刚度加载测试，实验时 Z 方向载荷为 2 500 kgf，X、Y 方向载荷各为 200 kgf，刚度测试数据如表 9-2 所示。

表 9-2  系统刚度测试数据表

加卸载荷 (kgf)		Z 向被测各点变形量 (μm)				X 向被测各点变形量 (μm)				Y 向被测各点变形量 (μm)			
		Zx1	Zx2	Zy1	Zy2	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	Y3	Y4
0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
200	加载					-4.25	-7	+12	-1.5	-5	+10.25	+7.5	+1.5
	卸载					+4.25	+7.2	-12	+1.5	+4.5	-10.2	-7.5	-1.5
500	加载	-7	+9.5	-4.5	-3.8								
	卸载	+7	-9	+4.7	+4								
1 000	加载	+16.25	+25	-15.25	-14								
	卸载	-16	-24	+14.75	+12.5								
2 000	加载	+29	+35	-29	-26								
	卸载	-29.25	-33	+29	+29								
说    明		(1) Zx1、Zx2 与 Zy1、Zy2，X1、X2 与 X3、X4，Y1、Y2 与 Y3、Y4 相位分别相差 90°。 (2) 表中所列数据为 3 次取值的平均值。											

对表中的数据进行计算，可以得到各个方向的刚度。

- Z 向刚度： $K = \frac{1\,000\text{ kgf}}{25 - (-24)\mu\text{m}} = 20\,408\text{ kgf/mm}$
- X 向刚度： $K = \frac{200\text{ kgf}}{12 - (-12)\mu\text{m}} = 8\,333\text{ kgf/mm}$
- Y 向刚度： $K = \frac{200\text{ kgf}}{10.25 - (-10.2)\mu\text{m}} = 9\,780\text{ kgf/mm}$

由计算可知, 最小刚度值为  $8\,333\text{ kgf/mm}$ , 远远满足传感器标定要求 (一般要大于  $1\,000\text{ kgf/mm}$ )。

## 9.3 压电石英测力仪动态响应分析

前面介绍的基本属于测力仪的静态设计问题, 本节旨在通过解析法阐明测力仪动态响应及动态测量误差的概念、内涵及评价指标等, 从而为测力仪的动态设计和动态性能检定提供理论根据和具体方法。因此, 本节可以视为研究与设计压电式动态测力仪必不可少的理论基础。

测力仪的动态响应根据它所受切削力的性质和作用时间长短的不同, 可分为频率响应与瞬态响应 (瞬态响应亦称为时间响应或阶跃响应), 两者之间有着密切的内在联系, 它们都是从不同的侧面以不同的方式来描述测力仪的动态特性的。

### 9.3.1 测力仪的频率响应

频率响应是指当对测力仪输入不同频率和幅值的正弦信号时, 系统在稳态时的输出特性。

从动力学观点可以把压电测力仪视为单质点的振动系统, 即是由一个等效质量  $m$ 、等效弹簧  $k$  和等效阻尼  $c$  组成的等效系统, 基本模型如图 9-8 所示。

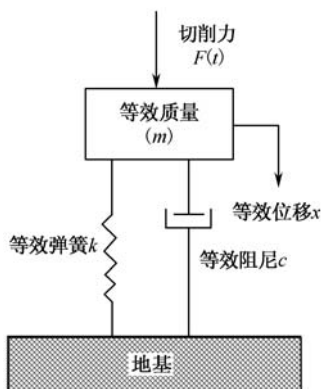


图 9-8 测力仪模型



压电测力仪上作用着按正弦函数变化的切削力:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (9.3.1)$$

式中,  $F_0$  是切削力的幅值 (N 或 kgf);  $\omega$  是切削力变动角频率 (rad/s)。

此时, 作用在模型上的力的平衡方程式为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (9.3.2)$$

即动态切削力是由弹性力、惯性力和阻尼力合成来表示的, 上述方程的稳态解 (强迫振动的解) 为

$$x = X_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (9.3.3)$$

式中

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (9.3.4)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (9.3.5)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{——测力仪固有角频率}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{——阻尼比}$$

由式 (9.3.4) 可得切削力的幅值与其他各力的幅值间关系为

$$F_0 = \sqrt{(kX_0 - m\omega^2 X_0)^2 + (c\omega X_0)^2} \quad (9.3.6)$$

式中,  $kX_0$  是弹性力幅值;  $c\omega X_0$  是阻尼力幅值;  $m\omega^2 X_0$  是惯性力幅值。

各力不仅是时间的函数, 也是频率的函数, 由式 (9.3.6) 可得各分力与外力显函数的表达式为

$$kX_0 = F_0 / \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (9.3.7)$$

$$c\omega X_0 = F_0 / \sqrt{\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2}{4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2} + 1} \quad (9.3.8)$$

$$m\omega^2 X_0 = F_0 / \sqrt{\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \quad (9.3.9)$$

以上 3 式可以分别表示为如图 9-9 所示的各分力与频率之间的关系。

由图 9-9 (a) 可见, 只有当  $\omega \ll \omega_n$  时,  $F_0 \approx kX_0$ , 由此可见“变位型”测力仪只有当外力变动频率非常低时, 测量才是准确的, 否则应该进行精度补偿。由图 9-9 (c) 可见,

当  $\omega \gg \omega_n$  时,  $F_0 \approx m\omega^2 X_0$ 。此时只要测得加速度便可推知切削力了, 用加速度计测单个模拟砂粒的切削力的磨削测力仪就是根据这个原理制成的。如果所测力频率  $\omega$  与  $\omega_n$  比较接近时, 那就必须通过 3 个矢量的合成来求切削力了, 或者使测力系统设置足够大的阻尼, 否则将会引起较大的测量误差。

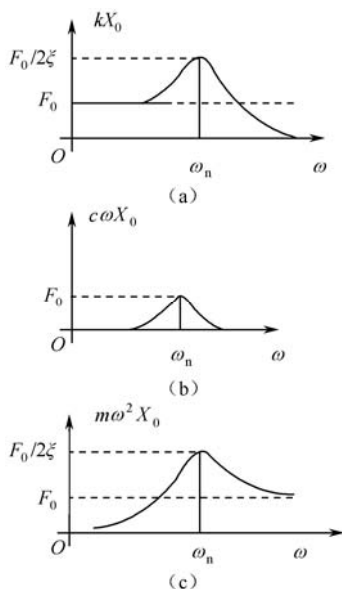


图 9-9 各分力与频率之间的关系

根据式 (9.3.7), 可以很容易求得描述测力仪频率 (响应) 特性的幅值比  $A(\omega)$  (亦称为幅频特性) 与相角差  $\Phi(\omega)$  (亦称为相频特性)。

$$\text{幅频特性: } A(\omega) = \frac{kX_0}{F_0} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}} \quad (9.3.10)$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) - \varphi_0(\omega), \text{ 当 } \varphi_0(\omega) = 0 \text{ 时,}$$

$$\text{相频特性: } \Phi(\omega) = \arctan \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (9.3.11)$$

幅值比也称为放大系数, 以  $V(\omega/\omega_n)$  表示。确切地说, 此处的  $A(\omega)$  是与位移信号 ( $x$ ) 成正比的输出量与输入量 ( $F(t)$ ) 之比, 所以它是“变位型”测力仪的幅频特性。对于电压式测力仪, 因为它不但能感受弹性力, 而且还可以感受一部分惯性力, 因此, 其幅频特性应为

$$\begin{aligned}
 A_p(\omega) &= \frac{kX_0 - \varphi m \omega^2 X_0}{F_0} \\
 &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_n^2}} - \frac{\varphi \omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_n^2}}
 \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

式中,  $0 < \varphi < 1$ ,  $\varphi$  取决于测力仪对惯性力感知的灵敏度, 灵敏度高的取较大值, 反之则取小值, 此值可由实际测量而求得。

### 9.3.2 动态误差与工作频带

#### 1. 幅值误差与宽度

作为一个理想的测力仪, 希望输出与输入在任何情况下都能保持固定不变的关系, 可实际上标志着测量精度的幅值比与相角差都是切削力频率  $\omega$  的函数, 当  $\omega$  增大时, 其测量误差也必然增大。从幅频特性来看, 幅值相对误差为

$$\varepsilon = \frac{kX_0 - F_0}{F_0} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2}} - 1 = A(\omega) - 1 \quad (9.3.13)$$

$\varepsilon$  也可由下式定义

$$K(j\omega_{\max}) = (1 + \varepsilon)K(j0)$$

两者的结果是一样的, 如果用图形表示出来, 则如图 9-10 所示。由上可知,  $\varepsilon$  是  $\omega_n$  和  $\xi$  的函数, 增大  $\omega_n$  或增大  $\xi$  都能使其减小。反之, 当  $\xi$  被设定时, 由于阻尼比的不同, 工作频带或设计的固有频率亦不同, 分为以下几种情况。

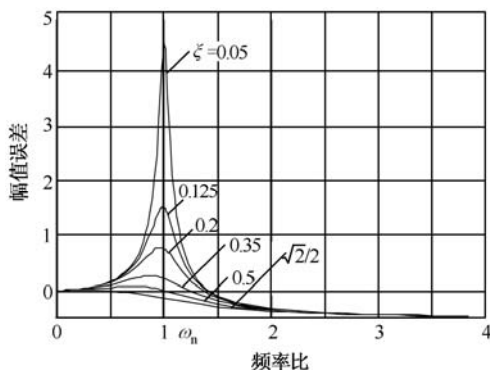


图 9-10 幅值误差  $\varepsilon$  与  $\omega_n$  和  $\xi$  的关系图

(1) 当  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}}{\varepsilon+1}}$  (最佳阻尼比) 时, 幅频特性曲线出现峰值, 且峰值点超出了  $\varepsilon$  所限定的范围。此时,  $\varepsilon = A(\omega) - 1$ , 很容易得出设计的固有频率为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{(1-2\xi^2)(\varepsilon+1) - \sqrt{(1-2\xi^2)^2(\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon+1)^2} + 1}} \quad (9.3.14)$$

式中,  $\omega_{\max}$  是给定的测力仪工作频率上限。

反之, 当  $\omega_n$  为已知时, 又可确定测力仪的工作频带为

$$0 \leq \omega \leq \omega_n \sqrt{\frac{(1-2\xi^2)(\varepsilon+1) - \sqrt{(1-2\xi^2)^2(\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon+1)^2} + 1}{1+\varepsilon}} \quad (9.3.15)$$

(2) 当  $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}}{\varepsilon+1}}$  (最佳阻尼比) 时, 幅频特性曲线峰值在  $\varepsilon$  限定范围之内。可见,  $\varepsilon = 1 - A(\omega)$ 。同理可得出设计的固有频率公式为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{(1-2\xi^2)(1-\varepsilon) - \sqrt{(1-2\xi^2)^2(1-\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^2} + 1}} \quad (9.3.16)$$

反之, 当  $\omega_n$  为已知时, 又可确定测力仪的工作频带。

(3) 当  $\xi \ll 1$  时, 此时  $\xi^2 \approx 0$ , 由式 (9.3.14) 可得  $\omega_n$  的设计公式为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \quad (9.3.17)$$

或写成工作频带为

$$0 \leq \omega \leq \omega_n \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \quad (9.3.18)$$

以上各式严格来讲, 仅对“变位型”测力仪是适合的。

对于压电测力仪, 其幅值相对误差与式 (9.3.13) 稍有不同。

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= A_p(\omega) - 1 \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_n^2}} - \frac{\varphi \omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_n^2}} - 1 \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

一般压电测力仪  $\xi \ll 1$ , 所以  $\xi^2 \approx 0$ , 由上式则得  $\omega_n$  的设计公式为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \sqrt{\frac{1+\varepsilon_p - \varphi}{\varepsilon_p}} \quad (9.3.20)$$

或当  $\omega_n$  为已知时, 可得带宽公式为

$$0 \leq \omega \leq \omega_n \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{1 + \varepsilon_p - \varphi}} \quad (9.3.21)$$

由式(9.3.19)和式(9.3.21)可以看出,压电测力仪的幅值相对误差比其他“变位型”测力仪的要小些,或者说,在 $\varepsilon$ 相同的情况下,压电测力仪的工作频带要比其他类型测力仪的要宽些。

## 2. 相位误差与带宽

相位误差即输入与输出信号的相角差。当初始条件 $\varphi_0(\omega)=0$ 时,该误差即由式(9.3.10)给出,其变化规律如图9-11所示:相位误差随着 $\omega$ 的增大而增大,同时随着 $\xi$ 的减小而减小。对于压电测力仪, $\xi$ 都非常小,所以相位误差都比较小,一般不作特殊要求。可是如果对测力仪有特殊要求,比如将测力仪放在闭环测试系统中,要求采取各种移相措施和运算补偿,这时对测力仪的相位误差就应该有明确的指标了,所以仍然需要有个计算公式来指导设计。

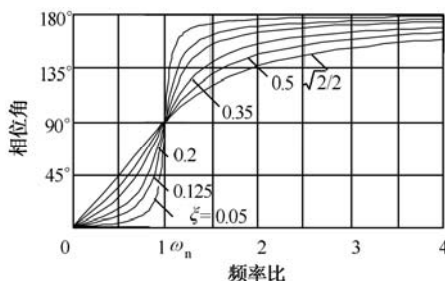


图 9-11 相位误差与 $\omega_n$ 和 $\xi$ 的关系图

设相位误差限制在 $\varphi$ 以内,从限制 $\varphi$ 的角度来要求,设计测力仪固有频率应为

$$\omega_n \geq \omega_{\max} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \tan^2 \varphi - \xi}} \quad (9.3.22)$$

将上式求得的 $\omega_n$ 与式(9.3.20)求得的 $\omega_n$ 进行比较,取较大者作为设计的依据。

## 9.4 电荷放大器对石英力传感器动态特性的影响

压电石英传感器刚度高、线性好、无迟滞、固有频率高,特别因其具有绝缘阻抗高和稳定性突出等优点而被广泛地应用于科学研究与自动检测和控制系统中。

通常压电测试系统主要由压电传感器、信号放大器及信号分析处理系统等部分组成。一般压电体由压电效应所产生的电荷信号很微弱而且不易保持,所以必须经过一个专门的

高阻抗电荷放大器,将电荷信号转换并放大成电压信号,该信号可以通过普通记录仪表(如数字电压表、电子计算机等)记录下来。因此,压电测试系统与其他测试系统相比,两个突出的不同之处是:一是采用了高刚度、高灵敏度、高固有频率的压电传感器;另一个就是运用了高阻抗的电荷放大器。压电测试技术之所以发展很快,其中高阻抗电荷放大器的出现起了决定性的作用。

本节采用控制理论对压电传感器的动态特性进行分析,从频域的角度建立了压电传感器接电压放大器和电荷放大器的动态模型,进而指出压电测试系统采用电荷放大器而不用一般电压放大器的原因。

### 9.4.1 压电石英传感器的等效电路

当传感器中的压电晶体承受外力的作用时,在它的两个电极面上,就出现极性相反但电量相等的电荷,显然,可以把压电传感器看成一个两极板上聚集异性电荷  $Q$ 、中间为绝缘体的电容器,其电容量为

$$C = \frac{\varepsilon A}{t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{t} \quad (9.4.1)$$

式中,  $A$  是石英晶片的面积;  $t$  是石英晶片的厚度;  $\varepsilon$  是石英的介电常数;  $\varepsilon_0$  是真空的介电常数;  $\varepsilon_r$  是石英的相对介电常数。

实际上,晶体产生压电效应是由于晶格原子(离子)之间的微小变形,通常忽略它是因为它非常小。考虑晶体变形时,由于压电效应,石英晶体表面的束缚电荷  $q$  正比于  $x$ ,即

$$q = Kx \quad (9.4.2)$$

因此,压电传感器可等效为电流  $i_N = dq/dt$  和一个电容  $C_N$  并联的电路,如图 9-12 所示。

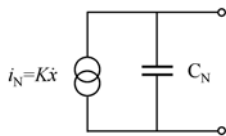


图 9-12 压电传感器电荷等效电路

### 9.4.2 电压放大器对压电传感器的频率响应特性的影响

如果将石英压电效应产生的电荷直接进行电压放大后由数字表读出,往往测量效果不是很理想,这可通过对图 9-13 所示的电路进行分析得出。图中  $C_C$  为连接导线的对地电容,  $R_L$  为记录显示设备的电阻。

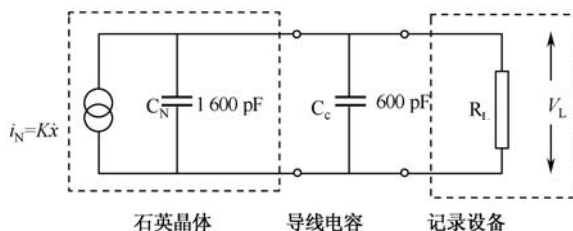


图 9-13 压电电压测量系统等效电路

对于石英晶体, 如果有力  $F$  施加到晶体表面, 则在晶体内部的原子之间要发生相对位移  $x$ , 位移  $x$  正比于所施加的外力  $F$ , 即

$$x = \frac{1}{k} F \quad (9.4.3)$$

晶体刚度  $k$  一般很大, 典型系数  $k = 2 \times 10^9 \text{ N/m}$ 。

由式 (9.4.3) 可知, 石英晶片的等效 Norton 电流源 (见图 9-12) 的电流大小为

$$i_N = dq/dt = K(dx/dt) \quad (9.4.4)$$

在图 9-13 所示的等效电压测量电路中, 负载  $R_L$  上的电压为

$$V_L = i_N Z \quad (9.4.5)$$

式中,  $Z$  是  $C_N$ 、 $C_c$ 、 $R_L$  的并联复阻抗, 它的大小为

$$\frac{1}{Z} = C_N s + C_c s + \frac{1}{R_L}$$

式中,  $s$  是拉普拉斯算子。

联立式 (9.4.4) 和 (9.4.5), 可得电流与电压之间的传递函数为

$$\frac{V_L(s)}{i_N(s)} = \frac{R_L}{1 + R_L(C_N + C_c)s} \quad (9.4.6)$$

式 (9.4.3) 中的位移与力的动态关系通常用二阶传递函数表示为

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1/k}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \quad (9.4.7)$$

式中, 固有频率  $\omega_n = 2\pi f_n$ , 石英的典型参数  $f_n = 10 \sim 100 \text{ kHz}$ ; 阻尼比  $\xi$  很小, 典型值为 0.05。

对式 (9.4.4) 进行拉普拉斯变换得

$$\frac{i_N(s)}{x(s)} = Ks \quad (9.4.8)$$

联立式 (9.4.6) ~ 式 (9.4.8), 可得到该压电电压系统的传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{V_L(s)}{F(s)} &= \frac{V_L(s)}{i_N(s)} \frac{i_N(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{F(s)} \\ &= \frac{d}{(C_N + C_C)} \frac{\tau s}{1 + \tau s} \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1\right)} \end{aligned} \quad (9.4.9)$$

式中,  $\tau = R_L(C_N + C_C)$ ;  $d = K/k$ 。

根据控制理论知识, 由式 (9.4.9) 知该系统传递函数有如下不足:

(1) 系统稳态的响应为  $d/(C_N + C_C)$ , 因此系统灵敏度不但依赖于石英晶片的等效电容  $C_N$ , 而且与连接导线的电容  $C_C$  有关。

(2) 系统传递函数的瞬态部分为

$$G(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s} \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1\right)} \quad (9.4.10)$$

式 (9.4.10) 中的第二项是二阶系统的传递函数, 它是所有弹性系统都具有的特性, 且无法消除。但是如果测量信号的频率小于  $\omega_{\max}$ , 一般情况下不会产生测量误差。而式 (9.4.10) 中的第一项  $\tau s/(1 + \tau s)$  意味着系统不能测量直流信号和变化比较缓慢的信号。

为了详细说明传递函数  $G(j\omega)$  的特点, 可以画出它的幅频特性  $A(\omega)$  与相频特性  $\varphi(\omega)$  曲线, 如图 9-14 所示。

幅频特性:

$$A(\omega) = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (9.4.11)$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctan(\omega\tau) - \arctan(2\xi(\omega/\omega_n)/(1 - (\omega^2/\omega_n^2))) \quad (9.4.12)$$

由式 (9.4.11) 中的  $\tau\omega/\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$  知, 它不能使低频率的信号不通过, 这是因为当  $\omega = 0$  时,  $A(\omega) = 0$ , 所以该系统不能测量频率低于  $1/\tau$  的信号, 如图 9-14 所示。

对于压电石英晶体, 典型特性参数  $C_N = 1\ 600\ \text{pF}$ ,  $C_C = 600\ \text{pF}$ ,  $R_L = 1\ \text{M}\Omega$ ,  $\tau = 2.2 \times 10^{-3}\ \text{s}$ 。在  $0.95 \leq A(\omega) \leq 1.05$  和相角误差  $\varphi = 0^\circ$  的条件下, 可求得它的测量范围为  $3/\tau \sim 0.2\omega_n$ , 即  $216\ \text{Hz} \sim 5.4\ \text{kHz}$ 。这段频率范围对于工程应用显然是不够的。



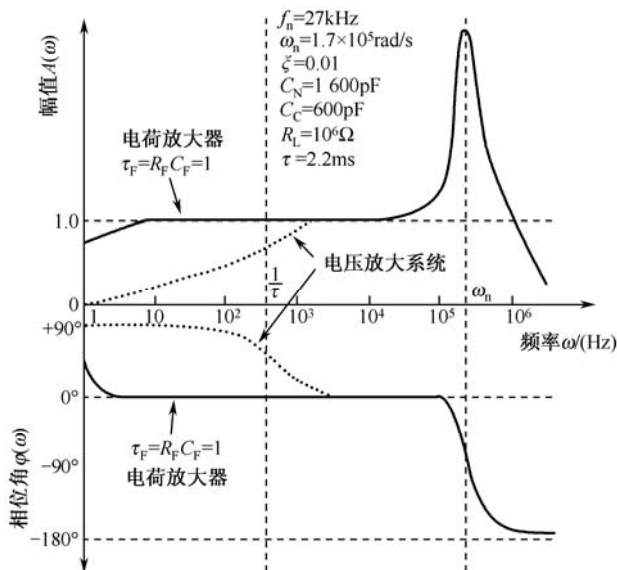
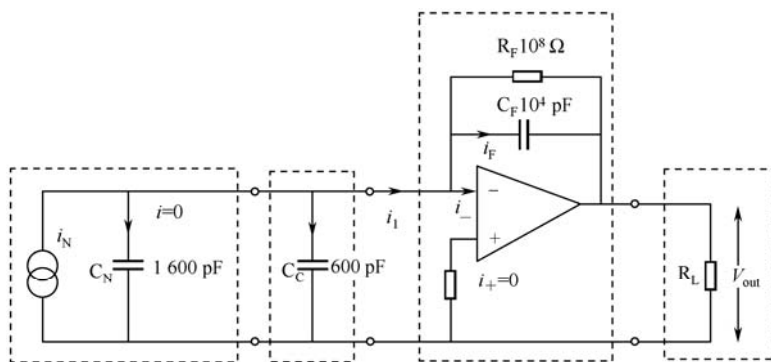


图 9-14 压电测量系统的幅频与相频特性曲线

### 9.4.3 电荷放大器对压电传感器的频率响应特性的影响

该电压测量系统的缺点可以通过电荷放大器来改善，此时压电电荷测量系统的结构如图 9-15 所示。



石英晶体 导线 电荷放大器 记录设备

图 9-15 压电电荷测量系统的结构

电荷放大器实质上是一个积分器，它的输出正比于  $\int i_N dt$ 。当有稳态外力输入时，可根据图 9-15 得出

$$i_i = i_F + i_- \quad (9.4.13)$$

在反馈电容  $C_F$  两端的电荷为

$$q_F = C_F(V_- - V_{out}) \quad (9.4.14)$$

对于理想的电荷放大器，可知  $i_- = i_+ = 0$  和  $V_- = V_+ = 0$ 。联立式 (9.4.13) 和式 (9.4.14) 可得

$$\frac{dV_{out}}{dt} = -\frac{1}{C_F} \frac{dq}{dt} \quad (9.4.15)$$

当  $q=0$ ,  $V_{out}=0$  时，对式 (9.4.15) 两边积分，可得理想电荷放大器的传递函数为

$$V_{out} = -\frac{q}{C_F} \quad (9.4.16)$$

由式 (9.4.16) 可知，系统的稳态灵敏度为  $1/C_F$ ，它只依赖于电荷放大器的反馈电容  $C_F$ ，而与石英晶体和连接导线的电容  $C_N$  无关。在理想的情况下，传递函数中的  $\tau s/(1+\tau s)$  项不会出现，因此该电荷测量系统能再现输入低频信号。但在实际应用中，必须有反馈电阻  $R_F$  连接在反馈电容  $C_F$  两端为直流通路提供一条回路，这时将重新引入  $\tau_F s/(1+\tau_F s)$  项，其中  $\tau_F = R_F C_F$ 。通过使  $R_F$  和  $C_F$  很大，系统的频率响应可以延伸到 1 Hz 以下。如当  $R_F=10^8 \Omega$  和  $C_F=10^4 \text{ pF}$ ， $\tau_F=1$  时，在  $A(\omega)=0.95$  的条件下，可求得  $\omega=3 \text{ rad/s}$ ，所以该电荷测量系统可以达到最低频率  $f=0.05 \text{ Hz}$ 。

# 附录 A

根据 Neumann 原理, 晶体的对称性不仅表现在结构上, 也表现在它的物理性质上, 而反映晶体力学性能的弹性常数也必然和晶体的对称性密切相关。对于各向异性晶体, 其弹性常数、压电系数和介电系数的数值都是按晶体坐标系给出的, 而实际使用的晶片往往是旋转切割的, 其坐标选取与晶体坐标系不同, 为此必须将弹性常数、压电系数和介电系数从晶体坐标系变换到实际采用的坐标系中。

## A.1 张量基本知识

### A.1.1 张量的认识

描述宏观物理性质的物理量是用宏观可测量的物理量之间的关系来定义的, 如电极化率  $\chi$  是由施加在材料上的电场强度  $E$  和由此感生的电极化强度  $P$  这两个可测量物理量之间的关系来定义的。

$$P = \varepsilon_0 \chi E \quad (\text{A.1.1})$$

一般而言, 某物理量  $C$  用

$$B = CA \quad (\text{A.1.2})$$

这样的公式来定义, 其中,  $A$  是作用物理量, 它代表施加于材料上的各种作用, 如上述的电场强度  $E$ ;  $B$  是感生物理量, 是该材料受到  $A$  作用而产生的物理量, 如受电场作用而产生的电极化强度  $P$ ;  $C$  是  $A$  与  $B$  之间的关系, 代表了材料本身的特性, 即材料的某种物理量, 属于物质量。而  $A$  与  $B$  并不代表材料本身性质, 都是可测量的物理量, 属于场量。一般通过测量  $A$  与  $B$  来得到物理量  $C$ 。

在表示宏观物理性质的物理量中, 有些物理量 (如密度、质量、体积) 数值的大小与测量方向无关, 即没有方向性, 这类物理量称为标量。有些物理量 (如电场强度  $E$ 、电极化强度  $P$ ) 的数值不仅有一定的大小, 而且与测量方向有关, 具有一定的方向性, 称为矢量。矢量在直角坐标系中可用 3 个分量值的大小来表示, 如电场强度  $E = (E_1, E_2, E_3)$ 。从张量分析角度, 把标量称为零阶张量, 而矢量因其分量只与一个坐标轴有关, 只有一个下角标, 故称为一阶张量。

除此之外, 还有一些物理量, 它们既具有一定量值, 又具有一定的方向性, 在直角坐标系中, 它们已经不能只由 3 个分量, 而必须由 9 个分量的组合才能进行描述, 每个分量都具有两个下标, 这样的物理量称为二阶张量。例如, 在各向异性结构的晶体中,  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  并不平行, 电极化率不再是标量, 而是一组与方向有关的数。按照物理性质定义, 假设只有沿  $x_1$  方向施加电场  $E_1$  ( $E_2 = E_3 = 0$ ), 在晶体中不仅在  $x_1$  方向, 而且在  $x_2$ 、 $x_3$  方向上都有可测得的电极化强度, 如图 A-1 所示。

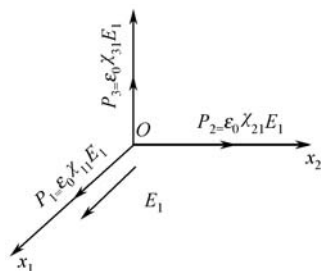


图 A-1 电场  $E_1$  作用下的极化强度

因此有

$$P_1 = \epsilon_0 \chi_{11} E_1, \quad P_2 = \epsilon_0 \chi_{21} E_1, \quad P_3 = \epsilon_0 \chi_{31} E_1 \quad (\text{A.1.3})$$

同理, 只有  $x_2$  或只有  $x_3$  方向加单向电场, 则有

$$P_1 = \epsilon_0 \chi_{12} E_2, \quad P_2 = \epsilon_0 \chi_{22} E_2, \quad P_3 = \epsilon_0 \chi_{32} E_2 \quad (\text{A.1.4})$$

$$P_1 = \epsilon_0 \chi_{13} E_3, \quad P_2 = \epsilon_0 \chi_{23} E_3, \quad P_3 = \epsilon_0 \chi_{33} E_3 \quad (\text{A.1.5})$$

如果在晶体上加任意方向的电场  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ , 那么在每一个方向的极化强度  $P_i$  都是 3 个电场分量的贡献结果, 即

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \epsilon_0 (\chi_{11} E_1 + \chi_{12} E_2 + \chi_{13} E_3) \\ P_2 &= \epsilon_0 (\chi_{21} E_1 + \chi_{22} E_2 + \chi_{23} E_3) \\ P_3 &= \epsilon_0 (\chi_{31} E_1 + \chi_{32} E_2 + \chi_{33} E_3) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.6})$$

式 (A.1.6) 缩写为

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (\text{A.1.7})$$

式中使用 Einstein 求和约定, 即重复的脚标表示求和, 下面叙述不再进行说明。

显然, 为了确定晶体的电极化率, 需要给出式 (A.1.6) 方程组右边的 9 个数, 这 9 个数可写成一个方形表, 即

$$\begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

这 9 个数形成的表就是电极化率二阶张量，其中每一个数为该二阶张量的分量。从式 (A.1.3) ~ 式 (A.1.5) 可以看出，电极化率张量各分量  $\chi_{ij}$  的物理意义是：沿  $x_j$  方向施加电场  $E_j$ ，在  $x_i$  方向测得的电极化强度  $P_i$ ，正是由于此类张量与两个坐标轴有关，所以把它称为二阶张量。以此类推，可以有三阶张量和四阶张量等。

张量的表示法及示例的物理量如表 A-1 所示。

表 A-1 张量的表示法及示例的物理量

张量表示式和名称	阶数	分量数 $3^m$	物理量举例
零阶张量 (标量)	0	1	质量、温度、密度
一阶张量 (矢量)	1	3	电场强度、电极化强度、热释电系数
二阶张量	2	9	介电系数、电极化率、应力、应变
三阶张量	3	27	压电模量、线性电光系数、二级非线性极化率
四阶张量	4	81	弹性系数、光弹系数、二次电光系数、电致伸缩系数

## A.1.2 张量的变换法则

要用张量描述晶体的物理性质，必须选定坐标系，当坐标系变化时，对于所描述的同—客观对象的某一物理性质应该是不变的，而发生变化的仅是张量的分量。因此，新旧坐标系中张量的分量之间必然存在着一定的关系，张量在坐标系发生变换时所必须满足的关系称为张量变换法则。

所谓正交变换是指具有同一原点的两个直角坐标系之间的变换，在变换中坐标系的轴单位保持不变。

设  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  为旧坐标系的 3 个坐标轴， $x'_1$ 、 $x'_2$ 、 $x'_3$  为变换后的新坐标系的 3 个坐标轴，如图 A-2 所示。新旧坐标轴之间的方向余弦如表 A-2 所示。

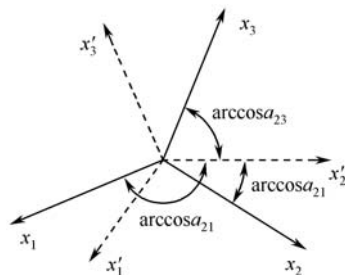


图 A-2 坐标轴的变换

表 A-2 新旧坐标轴之间的方向余弦

新 坐 标 系 \ 旧 坐 标 系	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$x'_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$x'_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

上述新旧坐标系的方向余弦的 9 个数构成一个正交矩阵。

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.9})$$

式 (A.1.9) 称为正交变换矩阵, 它表示新坐标系相对于旧坐标系的方位, 称为正变换。正交逆变换矩阵  $\mathbf{A}^{-1}$  为

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.10})$$

式 (A.1.10) 表示旧坐标系相对于新坐标系的方位。

## A.2 弹性顺度系数的坐标变换

石英晶体的弹性常数、压电系数和介电系数都是用张量来表示的, 用张量描述的各宏观可测物理量都是客观的, 不应随使用的坐标系变化而有所变化。但相对于不同的坐标系, 同一张量的分量可以不同, 而该张量所描述的客观物理量是同一实体。既然如此, 该张量在不同坐标系中的各分量必定存在着一定的关系, 以满足这一要求。张量在不同坐标系中各分量必须满足的关系, 就称为张量的变换定律。或者说, 张量的变换定律规定了张量在一个坐标系中的分量如何用另一个坐标系中的分量来表示。由于介电系数是二阶张量, 按照二阶张量坐标变换法则变换, 故不再介绍。

### A.2.1 应力坐标变换

设新旧坐标系分别为  $Ox'_1x'_2x'_3$  和  $Ox_1x_2x_3$ , 且新旧坐标系的坐标轴之间的方向余弦为  $a_{ij}$ , 上述新旧坐标系的方向余弦的 9 个数构成一个正交矩阵:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.1})$$

因为应力  $\boldsymbol{\sigma}$  与应变  $\boldsymbol{S}$  是二阶对称张量, 所以它们的坐标变换遵从二阶张量的变换规则。设  $\boldsymbol{\sigma}'$  和  $\boldsymbol{\sigma}$  分别为坐标变换前后的应力张量, 则根据二阶张量的变换法则有

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.2.2})$$

将上式展开, 首先考虑  $i = j = 1$  时的应力分量  $\sigma'_{11}$ , 有

$$\sigma'_{11} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{1m} a_{1n} \sigma_{mn} \quad (\text{A.2.3})$$

将上式完全展开, 并整理得

$$T'_1 = a_{11}^2 \sigma_{11} + a_{12}^2 \sigma_{22} + a_{13}^2 \sigma_{33} + 2a_{12} a_{13} \tau_{23} + 2a_{11} a_{13} \tau_{31} + 2a_{11} a_{12} \tau_{12} \quad (\text{A.2.4})$$

采用简缩脚标, 上式可以写成

$$T'_1 = a_{11}^2 T_1 + a_{12}^2 T_2 + a_{13}^2 T_3 + 2a_{12} a_{13} T_4 + 2a_{11} a_{13} T_5 + 2a_{11} a_{12} T_6 \quad (\text{A.2.5a})$$

同理, 可以得出变换后应力张量的其余 5 个分量为

$$T'_2 = a_{21}^2 T_1 + a_{22}^2 T_2 + a_{23}^2 T_3 + 2a_{22} a_{23} T_4 + 2a_{21} a_{23} T_5 + 2a_{21} a_{22} T_6 \quad (\text{A.2.5b})$$

$$T'_3 = a_{31}^2 T_1 + a_{32}^2 T_2 + a_{33}^2 T_3 + 2a_{32} a_{33} T_4 + 2a_{31} a_{33} T_5 + 2a_{31} a_{32} T_6 \quad (\text{A.2.5c})$$

$$T'_4 = a_{21} a_{31} T_1 + a_{22} a_{32} T_2 + a_{23} a_{33} T_3 + (a_{22} a_{33} + a_{32} a_{23}) T_4 + (a_{23} a_{31} + a_{33} a_{21}) T_5 + (a_{21} a_{32} + a_{31} a_{32}) T_6 \quad (\text{A.2.5d})$$

$$T'_5 = a_{31} a_{11} T_1 + a_{32} a_{12} T_2 + a_{33} a_{13} T_3 + (a_{32} a_{13} + a_{12} a_{33}) T_4 + (a_{33} a_{11} + a_{13} a_{31}) T_5 + (a_{31} a_{12} + a_{11} a_{32}) T_6 \quad (\text{A.2.5e})$$

$$T'_6 = a_{11} a_{21} T_1 + a_{12} a_{22} T_2 + a_{13} a_{23} T_3 + (a_{12} a_{23} + a_{22} a_{13}) T_4 + (a_{13} a_{21} + a_{23} a_{11}) T_5 + (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) T_6 \quad (\text{A.2.5f})$$

上面 6 组联立代数方程可以写成矩阵形式, 有

$$\mathbf{T}' = \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\text{式中 } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{12}a_{13} & 2a_{11}a_{13} & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{22}a_{23} & 2a_{21}a_{23} & 2a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{32}a_{33} & 2a_{31}a_{33} & 2a_{31}a_{32} \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & (a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23}) & (a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21}) & (a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{12} & a_{33}a_{13} & (a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33}) & (a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31}) & (a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32}) \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & (a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13}) & (a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11}) & (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

式 (A.2.6) 就是应力张量的坐标变换关系式, 矩阵  $\mathbf{M}$  叫做应力张量的变换矩阵。

按照完全相同的方法, 可以得出应变张量  $\mathbf{S}$  的坐标变换关系

$$\mathbf{S}' = \mathbf{N}\mathbf{S} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\text{式中 } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{12}a_{13} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{22}a_{23} & a_{21}a_{23} & a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & a_{32}a_{33} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{32} \\ 2a_{21}a_{31} & 2a_{22}a_{32} & 2a_{23}a_{33} & (a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23})(a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21})(a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\ 2a_{31}a_{11} & 2a_{32}a_{12} & 2a_{33}a_{13} & (a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33})(a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31})(a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32}) \\ 2a_{11}a_{21} & 2a_{12}a_{22} & 2a_{13}a_{23} & (a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13})(a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11})(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.9})$$

式 (A.2.9) 就是应变张量的坐标变换关系, 矩阵  $\mathbf{N}$  叫做应变张量的变换矩阵。  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{N}$  矩阵之间满足如下关系:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{N}^T, \quad \mathbf{M}^T = \mathbf{N}^{-1} \quad (\text{A.2.10})$$

式中,  $\mathbf{M}^{-1}$  是  $\mathbf{M}$  的逆矩阵;  $\mathbf{N}^T$  是  $\mathbf{N}$  的转置矩阵。

## A.2.2 弹性顺度系数的坐标变换

各向异性体的弹性系数  $s_{ij}$  或  $c_{ij}$  是与坐标方向有关的。在分析应力状态时, 常常已知一给定坐标系中的弹性常数, 而要求得在另一新坐标系中的弹性常数  $s'_{ij}$  或  $c'_{ij}$ , 这时就要求进行坐标变换。弹性顺度系数是一个四阶张量  $s_{ijkl}$ , 于是根据张量的坐标变换关系:

$$s'_{ijkl} = s_{mnpq} a_{im} a_{jn} a_{ks} a_{lp} \quad (\text{A.2.11})$$

设胡克定律在原始旧坐标系中表示为

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{s}\mathbf{T} \quad (\text{A.2.12})$$

在坐标变换后的新坐标系中表示为

$$\mathbf{T}' = \mathbf{c}'\mathbf{S}', \quad \mathbf{S}' = \mathbf{s}'\mathbf{T}' \quad (\text{A.2.13})$$

根据应力与应变的新旧坐标变换关系式, 有

$$\mathbf{T}' = \mathbf{M}\mathbf{T}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{N}^T \mathbf{S}' \quad (\text{A.2.14})$$

故有

$$\mathbf{T}' = \mathbf{M}\mathbf{c}\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{c}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{S}' = \mathbf{M}\mathbf{c}\mathbf{M}^T \mathbf{S}' \quad (\text{A.2.15})$$

将上式和式 (A.2.13) 进行比较, 得出弹性刚度系数在新旧坐标系中的变换关系为

$$\mathbf{c}' = \mathbf{M}\mathbf{c}\mathbf{M}^T \quad (\text{A.2.16})$$

同理, 可得出弹性顺度系数在新旧坐标系中的变换关系为



$$\mathbf{s}' = \mathbf{N} \mathbf{s} \mathbf{N}^T \quad (\text{A.2.17})$$

由式 (A.2.16) 和式 (A.2.17) 可知, 只要知道了应力和应变张量的坐标变换矩阵  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{N}$ , 就可以求出在新坐标系下的弹性系数。

### A.3 压电系数的坐标变换

压电应变系数是三阶张量, 在坐标变换时遵循三阶张量的变换法则。若正交变换矩阵为  $(a_{ij})$ , 则

$$d'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} d_{lmn} \quad (\text{A.3.1})$$

当压电应变系数张量和应力、应变、弹性顺度系数等张量缩写指标后用矩阵表示时, 压电常数矩阵的变换可由矩阵乘积表示。若正交变换矩阵为

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.2})$$

已知在常电场时的压电方程为

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{T} \quad (\text{A.3.3})$$

以正交变换矩阵  $\mathbf{A}$  左乘式 (A.3.3) 两边, 在上式后两项中间插入用相应变换矩阵乘积表示的单位矩阵, 有

$$\mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{A} \mathbf{d} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (\text{A.3.4})$$

在新坐标系下的压电方程为

$$\mathbf{D}' = \mathbf{d}' \mathbf{T}' \quad (\text{A.3.5})$$

比较式 (A.3.4) 与式 (A.3.5) 可得出

$$\mathbf{D}' = \mathbf{A} \mathbf{D} \quad (\text{A.3.6})$$

$$\mathbf{d}' = \mathbf{A} \mathbf{d} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{d} \mathbf{N}^T \quad (\text{A.3.7})$$

式 (A.3.7) 就是压电常数张量的变换公式。

## 参 考 文 献

- [1] 高长银. 压电石英晶片扭转效应研究及新型扭矩传感器的研制. 大连理工大学博士学位论文, 2004.
- [2] Changyin Gao, Baoyuan Sun, Min Qian. Investigation of the torsional effect of a piezoelectric quartz and torsion charge sensitivity. *Measurement Science and Technology*. 2003(14): 2021-2026.
- [3] Changyin Gao, Hui Zhao. Principle and Manufacture of a new type of torque sensor based on the torsional effect of a piezoelectric quartz disc. *Measurement Science and Technology*. 2006(17): 323-330.
- [4] Gao Changyin, Li Wanquan and Sun Baoyuan. Research on the piezoelectric torsional effect of a rectangular quartz disc and a novel drilling dynamometer. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 2010(43)3: 336-343.
- [5] Changyin Gao, Baoyuan Sun. Investigation of the piezoelectric thrust test stand for rocket engine. *IET Science, Measurement and Technology*, 2009(3)6: 395-402.
- [6] Changyin Gao, Wanquan Li. Theoretical Research on the Bending Effect of Piezoelectric Quartz and Experimental Verification. 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. 2009: 1957-1961.
- [7] Changyin Gao, Wanquan Li. Manufacture of the New Drilling Dynamometer Based on the Piezoelectric Deformation Effect. *ICEMI 2009 - Proceedings of 9th International Conference on Electronic Measurement and Instruments*, 2009: 4822-4826.
- [8] Changyin Gao, Wanquan Li. Research and Simulation of the Bending Effect of Piezoelectric Quartz under Uniformly Distributed Load. 2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2010: 1056-1059.
- [9] Gao Changyin, Li Wanquan. Research on the bending effect of piezoelectric quartz. 2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation, 2010: 136-139.
- [10] Gao Changyin, Li Wanquan. Research on the bending charge sensitivity distribution of piezoelectric quartz. *Applied Mechanics and Materials*, 2011(48-49): 980-983.
- [11] Gao Changyin, Zhao Cheng. Dynamic characteristic of the novel piezoelectric drilling dynamometer based on the torsional effect. *Proceedings - 3rd International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, ICMTMA 2011*, 2010: 1121-1124.
- [12] Gao Changyin, Li Wanquan. Design of the continuous casting machine for battery grid. *Advanced Materials Research*, 2011(225-226): 297-300.
- [13] Gao Changyin, Li Wanquan. Study of the torsional effect of a rectangular quartz disc. *Key Engineering Materials*, 2011(474-476): 2286-2289.
- [14] Gao Changyin, Li Wanquan. Design of the pinch machine for battery grid continuous casting machine based on link and floating gear mechanism. *Key Engineering Materials*, 2011( 474-476): 2258-2262.

- [15] 高长银, 孙宝元. 压电石英晶片扭转效应理论研究与验证. 机械工程学报, 2004, (8): 150-154.
- [16] 高长银, 孙宝元, 钱敏. 基于压电石英晶片扭转效应的扭矩传感器原理与研制, 大连理工大学学报, 2005(4): 557-561.
- [17] 高长银, 赵辉. 电荷放大器对石英传感器动态特性的影响. 压电与声光, 2006, 28(6): 654-656.
- [18] 高长银, 李明. 新型压电扭矩传感器动态特性研究. 仪器仪表学报, 2006(8): 898-901.
- [19] 高长银, 孙宝元. 火箭发动机推力矢量测量平台的原理与结构. 压电与声光, 2010, 32(3): 480-482.
- [20] 高长银, 李万全. 新型压电式二向钻削测力仪的原理与标定. 仪表技术与传感器, 2010, (3): 19-21, 49.
- [21] 高长银, 吴晓玲, 钱敏. 基于晶体变形效应的压电理论研究与验证. 中国机械工程, 2011, 22(17): 2092- 1096.
- [22] 高长银, 赵辉. 孙宝元. 新型压电扭矩传感器的结构与标定. 仪表技术与传感器, 2006, (5): 6-7.
- [23] 高长银, 付书明. 面向大规模定制的产品模块化设计. 成组技术与生产现代化, 2006(2): 56-58.
- [24] 高长银, 付书明. 基于层次分析法的模块创建方法. 成组技术与生产现代化. 2006(3): 38-40.
- [25] 崔玉国, 董维杰, 高长银. 压电微动工作台的位移自感知控制. 机械工程学报, 2008, v44(4): 159-164.
- [26] Sun Baoyuan, Wu Jiantong, Gao Changyin. Research on the torsional effect of piezoelectric quartz. Sensors and Actuators A: Physical. 2007, 136(1): 329-334.
- [27] 朱命怡, 吴晓玲, 高长银. 方形压电石英晶片扭转效应理论研究和验证. 中国机械工程, 2011, 22(13): 1555-1557.
- [28] 赵辉, 高长银, 张春风. 机器人数据采集系统研究. 机械工程与自动化. 2006, (4).
- [29] 戴恒震, 孙宝元, 李万全, 高长银. 一种多功能测力仪加载器. 现代机械. 2003, 6: 45-46.
- [30] 高长银参编写, 孙宝元, 杨宝清主编. 传感器及其应用手册. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [31] Scientific Technical Committees of CIRP-STCC. Reports of the scientific technical committees of CIRP-STCC. recommendation of calibration and operation of machined-tool dynamometer [J] . CIRP, 1974, 23(2):295~306.
- [32] 孙宝元, 钱敏, 张军. 压电式传感器与测力仪研发回顾与展望. 大连理工大学学报, 2001, 41(2): 127-134.
- [33] D.Berlincourt, H.Jaffe, L.R.Shiozawa. Phys.Rev., 1963(129): 1009.
- [34] W.P.Mason. Piezoelectricity, its history and applications. Acoustical Society of America, 1981, 70(6): 1561-1566.
- [35] R.W.Wood, A.L.Loomis. The physical and Biological Effects of Intense Audible Sound on Living Organisms and Cells. Phil.Mag., 1927,(4):417.
- [36] W.G.Cady. The Piezoelectric Resonator. Phys.Rev, 1921,(17):531.
- [37] 张福学. 现代压电学. 北京: 科学出版社, 2002.
- [38] S.Y.Lin. Transducers of longitudinal-torsional compound vibrational modes. IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control, 1997, 44(6):1189-1197.
- [39] Jan Söderkvist. Piezoelectric beams and vibrating angular rate sensors. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1991, 38(3):271-280.
- [40] Jan Söderkvist. An analysis of space-dependent electric fields used in exciting flexural vibrations of piezoelectric beams. Mras.Sci.Technol, 1990,(1):731-737.

- [41] 王英光. 压电晶体弯曲效应的研究及应用. 大连理工大学硕士学位论文, 2003,6.
- [42] 张良莹, 姚禀. 电介质物理. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
- [43] Jan Söderkvist. Activation and detection of mechanical vibrations in piezoelectric beams. *Sensors and Actuators A*, 1996, (32): 567-571.
- [44] Jan Söderkvist. Dynamic behavior of a piezoelectric beam. *J. Acoust. Soc. Am*, 1991, 90(2):686-692.
- [45] Tokin. Actuator employs piezoelectric torsion qualities. *JEE*, 1991, 296(28):117.
- [46] Chulho Kim, David Lewis, C.C.Wu, et al. High authority piezoelectric torsional actuators. *Proceeding of the 11th IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics*, Montreux, 1998, 277-280.
- [47] O.Ohnishi, O.Myohga, T.Uchikawa, et al. Piezoelectric ultrasonic motor using longitudinal-torsional composite vibration of a cylindrical resonator. *IEEE Proceedings Ultrasonics symposium*, 1989, 2: 739-742.
- [48] Y.Tomikawa, K.Adachi, M.Aoyagi. Some constructions and characteristics of rod-type piezoelectric ultrasonic motors using longitudinal and torsional vibrations. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, *IEEE Transactions*, 1992, 39(5): 600-608.
- [49] 孙宝元, 张贻恭. 压电石英力传感器及动态切削测力仪. 北京: 计量出版社, 1985.
- [50] [日] 森田正直, 山崎弘郎. 传感器工程学. 孙宝元, 译. 大连: 大连工学院出版社, 1988.
- [51] 陈春荣, 赵新乐. 晶体物理性质与检测. 北京: 北京理工大学出版社, 1995.
- [52] Sun b.y., W j.t., Zhang j., Qian M. A New Model Describing Physical Effects in Crystals: The Diagrammatic and Analytic Methods for Macro-Phenomenological Theory. *Journal of Materials Processing Technology(SCI)*, 2003, (139): 444-447.
- [53] 肖定全, 王民. 晶体物理学. 成都: 四川大学出版社, 1989.
- [54] 铁摩辛柯, 古地尔. 弹性理论. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [55] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学. 上海: 上海交通大学出版社, 1997.
- [56] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- [57] S.G.Lekhnitskii. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Mir Publisher, 1981.
- [59] 麦克斯韦. 电磁通论. 戈革, 译. 武汉: 武汉出版社, 1992.
- [60] 徐永斌, 何国瑜, 卢才成, 苏东林. 工程电磁场基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1992.
- [61] 张文彤. 世界优秀统计工具 SPSS11 统计分析教程(基础篇). 北京: 北京希望电子出版社, 2002.
- [62] 方能航. 矢量、并矢分析与符号运算法. 北京: 科学出版社, 1996.
- [63] 孙宝元、高长银、钱敏研制的“一种压电石英片式扭矩传感器与制作工艺方法”授权中国发明专利, 专利号 ZL 03133521.7.